

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики

Л.М. Зеленый, А.В. Милованов

Цель обзора — познакомить читателя с рядом нестандартных идей, отражающих новые парадигмы современной теории турбулентности. Речь идет как о применении топологических методов при описании структурных свойств турбулентного состояния, так и о переходе к кинетическим уравнениям в дробных производных в исследованиях, касающихся микроскопических характеристик среды. Центральное место в обзоре занимает так называемая постоянная протекания $C \approx 1,327\dots$ — универсальная константа, описывающая топологию неравновесных (квази)стационарных состояний в сложных нелинейных динамических системах, допускающих самоорганизованное критическое поведение. Большое внимание уделено процессам формирования степенных спектров мощности в турбулентных средах, а также решению ряда актуальных проблем, стоящих перед современной космической электродинамикой: построению самосогласованной модели турбулентного токового слоя, анализу явления магнитосферной суббури, обсуждению вопросов, связанных с образованием и эволюцией крупномасштабных магнитных полей в фотосфере Солнца и межпланетном пространстве.

PACS numbers: 05.40. – a, 05.45.Df, 05.65. + b, 94.30. – d

Содержание

1. Введение (810).

2. Важнейшие определения и теоремы (812).

2.1. Определение хаусдорфовой размерности. 2.2. Определение индекса связности. 2.3. Определение спектральной фрактальной размерности. 2.4. Теорема об универсальном значении. 2.5. Теорема о фрактальной границе.

3. Странные процессы переноса (817).

3.1. Процессы переноса на самоподобных фрактальных структурах. 3.2. Субдиффузия и супердиффузия. 3.3. Процессы переноса на пороге протекания.

4. Дробное кинетическое уравнение (820).

4.1. Формулировка уравнения. 4.2. Дробная производная по времени. 4.3. Дробная производная по пространственной переменной. 4.4. Дробное условие нормировки и радиальная часть обобщенного лапласиана. 4.5. Среднеквадратическое смещение частиц.

5. Феномен самоорганизованной критичности (823).

5.1. Ограничение на число Кубо. 5.2. Статистика динамических флуктуаций. 5.3. Спектры самоаффинных рядов. 5.4. Действие

для динамических флуктуаций. 5.5. Модель песчаной горки. 5.6. Супердиффузия вблизи СОК.

6. Спектры флуктуаций в хвосте магнитосферы (827).

6.1. Розовый шум в хвосте магнитосферы. 6.2. Степенные спектры на промежуточных частотах. 6.3. Темно-коричневый шум в хвосте магнитосферы. 6.4. Черный шум на высоких частотах?

7. Самосогласованная фрактальная модель турбулентного токового слоя (829).

7.1. Система уравнений для токового слоя. 7.2. Самосогласованная оценка размера сгустков. 7.3. Оценка коэффициента турбулентного переноса. 7.4. Условие согласования. 7.5. Значения хаусдорфовой размерности и индекса связности. 7.6. Спектр флуктуаций на промежуточных частотах. 7.7. Явление магнитосферной суббури.

8. Странные ускорения в турбулентных средах (834).

8.1. Ускорение Ферми. 8.2. Учет корреляций. 8.3. Дробная производная по времени. 8.4. Дробная производная по фазовой переменной. 8.5. Замечание о терминологии. 8.6. На пути к НСС: промежуточное состояние. 8.7. Поведение коэффициента переноса. 8.8. Обобщенные законы ускорения.

9. Нелинейное кинетическое уравнение (837).

9.1. Самодействие турбулентного поля. 9.2. Кинетическое уравнение для систем с самодействием. 9.3. Самоподобные функции распределения. 9.4. Ограничения на параметр η . 9.5. Каппа-распределения. 9.6. Популяции горячих частиц в магнитосфере Земли. 9.7. Бурная релаксация и спектры космических лучей.

10. Фрактальные агрегаты и явления роста (840).

10.1. Фрактальные кластеры в фотосфере Солнца. 10.2. Цветные шумы в солнечном ветре.

Л.М. Зеленый, А.В. Милованов. Институт космических исследований РАН, 117997 Москва, ул. Профсоюзная 84/32, Российская Федерация
Тел. (095) 333-45-34
E-mail: lzelenyi@iki.rssi.ru, amilovan@mx.iki.rssi.ru

Статья поступила 4 июля 2003 г.
после доработки 30 марта 2004 г.

11. Фрактонные возбуждения и дробное параболическое уравнение (843).

- 11.1. Фрактонные возбуждения на фрактальных структурах. 11.2. Нелинейное дисперсионное соотношение. 11.3. Спектральная плотность состояний. 11.4. Дробное кинетическое уравнение для фрактонных возбуждений. 11.5. Самосжатие фрактонных мод и дробное параболическое уравнение. 11.6. Самоделокализация фрактонных и дробное нелинейное уравнение Шрёдингера. 11.7. Дробное уравнение Гинзбурга–Ландау. 11.8. Топологическое нелинейное "затухание Ландау" и постоянная протекания. 11.9. Фрактонная модель солнечного ветра.

12. Заключение (849).

13. Приложение. Список часто используемых обозначений и сокращений (849).

Список литературы (850).

1. Введение

Развитие современной физики (как теоретической, так и экспериментальной) во многом опирается на представление о множествах, обладающих нецелой размерностью. Понятие дробной (фрактальной) размерности было впервые сформулировано в работах Хаусдорфа [1] и Безиковича [2], которым предшествовали исследования выдающихся математиков конца XIX – начала XX века, таких, как Кантор, Вейерштрасс, Пеано, Кох, Серпинский. Основы топологической теории размерности были заложены замечательным российским математиком П.С. Урысоном, трагически погибшим в возрасте 26 лет в 1924 г. Обобщенная (дробная) размерность играет ключевую роль в абстрактной математике, в частности, в теории чисел [3–5].

Термин *фрактальная размерность* стал частью физического лексикона около 25 лет назад, начиная с фундаментальных работ Мандельброта [6–8] по геометрии случайных процессов. Бесспорной заслугой Мандельброта стала демонстрация необычайно широкого круга явлений, приводящих к формированию фрактальных множеств, а также определение *фрактала* как *структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому* [9]. Классическими примерами фракталов являются изрезанные береговые линии [6], случайные временные ряды [7], русла рек [8], траектории броуновских частиц [8] и др.

В настоящее время понятие фрактала воспринимается как одна из парадигм современной теоретической физики. Всплеск работ по фракталам затронул такие основополагающие направления, как неравновесная термодинамика [10, 11] и космология [12–14], теория динамического хаоса [10, 15, 16] и гидродинамической турбулентности [10, 17, 18], исследование фазовых переходов [19, 20] и транспортных явлений [21–23]. Богатый спектр приложений фрактальной геометрии в теоретической и экспериментальной физике обсуждается в сборнике [24], а также в монографиях [25–28]. Изложение математических основ современной фрактальной геометрии можно найти в [9, 29, 30].

Важный класс фрактальных объектов образуют множества, описывающие геометрию *протекания*, или *перколяции*. (Термины "перколяция" и "протекание" в дальнейшем считаются синонимами.) Под перколяцией мы понимаем случайное распространение *жидкости* через *среду*, причем абстрактные понятия "жидкость" и "среда" могут быть интерпретированы в соответствии с физиче-

ским смыслом задачи [9]. Теории перколяции посвящена обширная литература; отметим монографии [9, 31–33], а также обзоры [34–37]. Перколяция является *критическим* процессом [36], т.е. предполагает существование некоторого *порога*, ниже которого распространение жидкости ограничено конечной областью среды. Вблизи порога протекание происходит по фрактальному множеству, геометрия которого определяется исключительно законами критичности. Условие критичности приводит к независимости геометрических характеристик фрактала от микроскопических свойств среды. Данное явление может быть интерпретировано как *универсальность* фрактальной геометрии перколирующих множеств на пороге протекания. Наиболее яркая формулировка свойства универсальности известна как анзац Александра–Орбаха (АО) о равенстве спектральной размерности фрактального множества (т.е. эффективного числа его "внутренних" степеней свободы) в точке перколяционного перехода значению $4/3$ во всех объемлющих (целых) размерностях n не ниже 2 [37, 38].

Доказательство анзаца АО в высоких размерностях $n \geq 6$ основано на теории среднего поля [21, 22, 37, 39]. Приближение среднего поля соответствует процессам протекания на *деревьях Кэли* (называемых в физике *решетками Бете*) [28]. Дерево Кэли представляет собой граф без петель, имеющий равное число ветвей в каждом из узлов. Объемлющее пространство при $n \geq 6$ столь вместительно, что ветви деревьев Кэли "не мешают" друг другу (т.е. не образуют петель — замкнутых циклов). В более низких размерностях $2 \leq n \leq 5$ места для "правильного" расположения ветвей уже не хватает: деревья Кэли срываются в "клубок", а приближение среднего поля нарушается вследствие "деструктивной" роли циклических орбит, дающих неперенормируемый вклад в пропагатор на пороге протекания [21]. Проблема усугубляется тем, что отказ от среднеполевого описания при $2 \leq n \leq 5$ затрагивает концептуальные основы фрактальной геометрии [37] вплоть до определения фрактала как такового [9]. Дефицит идей в этой области поставил общее аналитическое доказательство (или опровержение) анзаца АО (равно как и его возможные модификации при $2 \leq n \leq 5$) в ряд наиболее трудных проблем фундаментальной теории перколяции [22].

Прогресс был достигнут в контексте топологической теории фрактальных множеств, предложенной в оригинальных работах [40–43]. Ключевым моментом стало слияние "традиционной" фрактальной геометрии [9, 28] и дифференциальной топологии [44–46], нашедшее свое отражение в принципиально новых математических образах [40], таких, как *дробное евклидово пространство* и *фрактальное многообразие*. Оказалось, что перколирующие фрактальные структуры представляют собой то, что можно назвать *дробным шаром*, имея в виду существование некоторого связующего диффеоморфного (гладкого взаимно однозначного) отображения. На пороге протекания спектральная размерность шара минимальна, при этом должно выполняться условие линейной связности (т.е. целостности шара как топологического объекта). Телесный угол, на который может опираться такой шар, во всяком случае не меньше π , т.е. угла в основании полуокружности, соединяющей северный и южный полюса (подробнее об этом см. раздел 2, где мы обсудим соответствующие геометрические построения). Для того чтобы шар опирался на столь

малый угол, его спектральная размерность должна быть достаточно низкой; ее точное значение (которое мы обозначим через C) суть некоторое иррациональное число, приблизительно равное $1,327\dots$. Полученная величина имеет фундаментальный математический смысл — это минимальное дробное число степеней свободы, необходимое частице для достижения бесконечно удаленной точки при случайных блужданиях в евклидовом пространстве. Чтобы вложить шар, спектральная размерность которого равна $C \approx 1,327\dots$, в евклидово пространство размерностью n , потребуется не более $n = 5$ объемлющих измерений. В работах [41–43] число $C \approx 1,327\dots$ названо *постоянной протекания*, — по существу, это новая фундаментальная константа, характеризующая наиболее общие топологические свойства фракталов, такие, как связность. Поскольку значение постоянной протекания отлично от $4/3$, топологическая теория фракталов опровергает анзац АО в низких размерностях $2 \leq n \leq 5$. Можно сказать, что анзац АО справедлив лишь в высоких размерностях $n \geq 6$, где выполняется приближение среднего поля. Отклонение величины $C \approx 1,327\dots$ от $4/3$ при $2 \leq n \leq 5$ обеспечивает сходимость ренорм-группового разложения [22] термодинамических величин в точке перколяционного перехода.

Интерес к топологическим свойствам перколирующих фрактальных структур связан не только (и даже не столько) с отмеченной выше универсальностью критических явлений в случайных средах, но, скорее, с необходимостью понять наиболее общие закономерности в поведении сложных нелинейных динамических систем, обнаруживающих самосогласованное стремление к критическим режимам. Речь в данном случае идет о существовании в таких системах неравновесных (квази)стационарных состояний (НСС), обладающих то-

пологией перколирующего фрактального множества. В качестве примеров укажем на многомасштабное взаимодействие полей и токов в дальнем хвосте магнитосферы Земли [47], процессы самоорганизации в низкотемпературной замагниченной плазме [48], а также формирование фрактальной "паутины" из проводящих элементов в самоорганизующихся органических полимерах [43].

Как правило, переход к НСС связан с одновременным развитием большого числа неустойчивостей, "интерферирующих" между собой. С усилением нелинейных эффектов различные неустойчивости теряют свою "индивидуальность," трансформируясь в некоторую универсальную коллективную "моду", идеализированные свойства которой не зависят от кинетики "парциальных" линейных мод на начальных стадиях эволюции системы (рис. 1). Данная идеология положена в основу *геометрического описания* турбулентности, нашедшего целый ряд приложений в космической электродинамике [47, 49–54]. Заметим, что универсальность коллективной моды есть не что иное как универсальность фрактальной геометрии НСС в контексте перколяционного перехода.

Стабилизация системы вблизи НСС воспринимается наблюдателем как переход в *турбулентное* состояние, адекватное возникновению сложных пространственных распределений в критической области [50]. Важно понимать, что данный тип "турбулентности" целиком определяется процессами самоорганизации в системе и является, скорее, признаком "порядка", чем "хаоса". Крупномасштабную упорядоченность турбулентного состояния можно в данном случае отождествить с обобщенными симметриями дробного шара, диффеоморфного фрактальному множеству на пороге протекания [40]. Структурная устойчивость НСС как "симметричной" турбулентной фазы поддерживается за счет

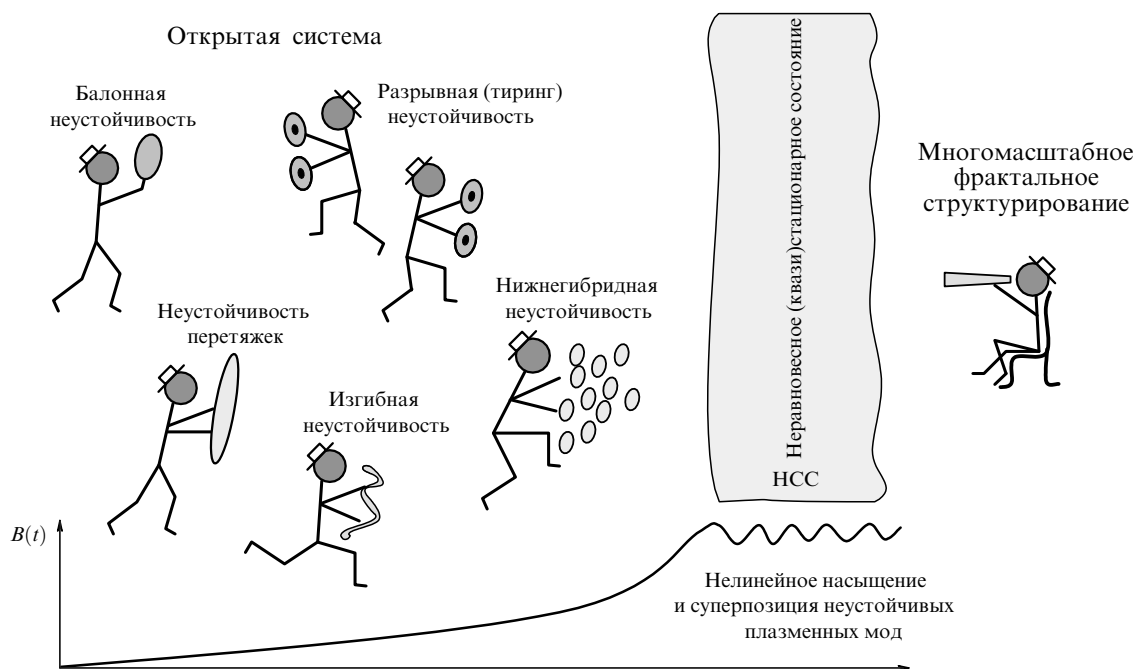


Рис. 1. Развитие универсальной коллективной "моды", отвечающей за переход сложных нелинейных динамических систем к неравновесному (квази)стационарному состоянию. В качестве примера приведем процессы нелинейной стабилизации и насыщения неустойчивых плазменных мод в дальнем хвосте магнитосферы Земли (подробнее об этом см. раздел 7). В нижней части рисунка показан характерный ход зависимости нелинейной амплитуды магнитоплазменных волн V от времени.

многомасштабных *корреляций*, играющих ключевую роль в режиме сильной нелинейности [55–58]. В статистически однородных изотропных системах возникновение крупномасштабной упорядоченности предполагает *расходимость* корреляционной длины для фрактального распределения:

$$\xi \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Условие (1.1) может выполняться как по трем, так и по двум направлениям, например в плоскости, перпендикулярной внешнему однородному магнитному полю. Поскольку стабилизация системы вблизи НСС так или иначе связана с существованием локального экстремума (минимума) свободной энергии, условие (1.1), отнесенное к эффектам самоорганизации турбулентного ансамбля, одновременно требует "минимальности" (критичности) его фрактальной геометрии, отвечающей перколяционному переходу в среде.

Дальнодействующие корреляционные эффекты проявляются в "странном" (негауссовом) поведении кинетических процессов вблизи НСС; кинетические аномалии обнаружены, в частности, при моделировании явлений переноса [21, 59–64], определении спектров возбужденных состояний [37, 38], исследовании химических реакций [22, 65], а также в экспериментах по ускорению пробных частиц [66]. Можно сказать, что странность и фрактальность являются взаимно согласованными характеристиками одного и того же явления — самоорганизации системы к неравновесному турбулентному состоянию, динамика которого целиком подчиняется многомасштабным корреляционным взаимодействиям.

Цель настоящего обзора — познакомить читателя с принципиальными идеями и методами, лежащими в основе топологического описания турбулентности. Отбор материала, создавший немало трудностей при подготовке обзора, продиктован как научными интересами авторов, так и актуальностью большинства проблем, стоящих перед современной теорией турбулентности, включая ее приложения к космической электродинамике и физике плазмы. Обзор построен следующим образом. Важнейшие определения и теоремы, характеризующие топологические свойства фрактальных структур, приведены в разделе 2. При первом чтении детали математических доказательств, например, доказательство теоремы об универсальном значении, можно пропустить. Переход от топологии к динамике осуществляется в разделе 3, где мы рассмотрим странные процессы переноса на перколирующих фрактальных множествах. Кинетика переноса обсуждается в разделе 4 в свете нетрадиционного формализма, апеллирующего к представлению о производных обобщенного (дробного) порядка. В разделе 5 изложена концепция самоорганизованной критичности (СОК), ставшей одной из парадигм современной нелинейной физики. В качестве иллюстрации в разделе 6 мы проанализируем спектральные свойства магнитоплазменной турбулентности в хвосте магнитосферы Земли. Фрактальная модель самосогласованного токового слоя, описывающая электродинамическую систему хвоста магнитосферы вблизи основного неравновесного (квази)стационарного состояния, построена в разделе 7. Там же приведена модель магнитосферной суббури как топологического фазового перехода на перколирующей фрактальной сети. Процессы ускорения частиц вблизи НСС рассмотрены в разделе 8, где

введено понятие странного процесса Ферми (как фрактального аналога модели случайного ускорения). Самоогласованное кинетическое описание НСС представлено в разделе 9 с акцентом на нелинейные обобщения динамических уравнений в дробных производных. С нелинейными обобщениями мы встретимся вновь в разделе 11, где будут получены дробное параболическое уравнение (с учетом явления странной дифракции), дробное нелинейное уравнение Шрёдингера (как частный случай параболического), а также дробное уравнение Гинзбурга–Ландау, вытекающее из нелокального разложения свободной энергии системы вблизи точки фазового перехода второго рода. Эффекты агрегации и роста в неравновесных системах определяют тематику раздела 10, где мы вкратце остановимся на структурных моделях солнечных пятен и межпланетного магнитного поля. В разделе 11 нас будут интересовать волновые процессы на перколирующих фрактальных множествах, включая явления самофокусировки и самосжатия фрактоновых возбуждений — собственных (квази)акустических мод фрактальной среды. Мы также обсудим приложения фрактонов к динамической модели солнечного ветра, допускающей формирование "колмогоровских" спектров турбулентности на более ранних (по сравнению со структурными моделями) стадиях истечения вещества из короны. Принципиальные моменты, изложенные в обзоре, суммированы в заключении (раздел 12).

2. Важнейшие определения и теоремы

2.1. Определение хаусдорфовой размерности

Рассмотрим множество точек $F \subseteq E^n$, вложенное в евклидово пространство E^n размерностью $n \geq 1$. По определению, число n (называемое *размерностью пространства вложения*) принимает целые положительные значения $1, 2, 3, \dots$. Далее, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число. Определим n -мерный ε -куб в E^n как топологическое произведение $\bar{I}(\varepsilon) \times \dots [n] \dots \times \bar{I}(\varepsilon)$, где $\bar{I}(\varepsilon)$ обозначает замкнутый интервал длиной ε . (Под топологическим произведением $A \times B$ множеств A и B понимаются всевозможные пары точек (x, y) , где $x \in A$ и $y \in B$ [46].) Пусть $\mathcal{N}_n(\varepsilon)$ — минимальное число n -мерных ε -кубов, покрывающих множество точек F с точностью ε . Следуя Колмогорову [67], назовем *хаусдорфовой фрактальной размерностью* множества F число

$$d_f = d_f[F] = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln \mathcal{N}_n(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (2.1)$$

Легко видеть, что хаусдорфова размерность евклидова пространства E^n равна $d_f = n$. В общем случае $d_f \leq n$ по смыслу вложения $F \subseteq E^n$. Более того, для любого подмножества $F' \subseteq F$ имеет место неравенство $d_f[F'] \leq d_f[F]$. Можно показать, что определение (2.1) (в смысле работы Колмогорова [67]) эквивалентно определению размерности Хаусдорфа–Безиковича [1, 2], являющемуся альтернативой (2.1); исключение составляет ряд патологических случаев, не имеющих физического интереса [36]. Заметим, что хаусдорфова размерность d_f может принимать произвольные действительные значения, включая отрицательные (как характеристика степени пустоты множества) и иррациональные.

Предел (2.1) существует для множеств F , обладающих свойством самоподобия, или масштабной инвариантности. Данное свойство может выполняться с различными показателями подобия вдоль различных направлений в пространстве. В этом случае говорят о самоаффинных фракталах. Фракталы подразделяют на детерминированные и случайные. Примером детерминированного фрактала является кривая Коха, возникающая при бесконечном повторении (во все меньшем и меньшем масштабе) одной и той же операции — деления отрезка на три равные части и построения на средней трети равностороннего треугольника (рис. 2а). Нетрудно убедиться, что хаусдорфова размерность кривой Коха составляет $d_f = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,26 \dots$. В отличие от детерминированных фракталов, большинство фрактальных объектов, встречающихся в природе, так или иначе связаны со стохастическими процессами и в этом смысле являются случайными. В качестве примера приведем стохастический ряд на рис. 2б, представляющий вариации межпланетного магнитного поля в широком диапазоне временных масштабов [68]. О таких рядах говорят

как о статистически самоаффинных фрактальных кривых. Статистически самоаффинной кривой называется множество точек $\mathcal{I}_S(t)$ такое, что $h^{S-1}\mathcal{I}_S(ht)$ статистически эквивалентно $\mathcal{I}_S(t)$ для любого действительного h [9]. Параметр h задает масштабное преобразование кривой $\mathcal{I}_S(t)$ с показателем подобия $0 \leq S \leq 1$. Кривая $\mathcal{I}_S(t)$ обладает самоаффинной структурой на всех масштабах, определяемых параметром t , который считается непрерывным. Аппроксимируя множество точек $\mathcal{I}_S(t)$ гистограммой с шагом ε (рис. 2б), легко показать [69], что длина последней $\sum_i |B(t_i + \varepsilon) - B(t_i)|$ расходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ как ε^{-S} . Из определения (2.1) следует, что хаусдорфова размерность множества $\mathcal{I}_S(t)$ равна

$$d_f[\mathcal{I}_S] = 1 + S. \tag{2.2}$$

Для гладких кривых имеем $S = 0$ и $d_f[\mathcal{I}_0] = 1$. Для непрерывной самоаффинной кривой $\mathcal{I}_S(t)$ произвольного вида ($0 \leq S \leq 1$) хаусдорфова размерность $d_f[\mathcal{I}_S]$ заключена в пределах от 1 до 2.

Как правило, масштабно-инвариантные множества заполняют лишь некоторую часть объемлющего евклидова пространства E^n . Области E^n , не принадлежащие F , можно рассматривать как пустоты, которые могут лежать как внутри, так и вне F . (Из внутренних пустот нельзя выйти, не пересекая F .) Следствием существования пустот является степенное убывание средней плотности множества F в E^n в зависимости от масштаба длины r (рис. 3а). Действительно, предположим для простоты, что фрактальное множество F "изотропно" (т.е. показатели подобия совпадают по всем направлениям). Тогда эффективная "масса", заключенная внутри гипертесферы радиусом r , растет с r как r^{d_f} , где d_f — хаусдорфова размерность фрактала. Аналогично эффективная "масса" объемлющего евклидова пространства E^n возрастает как r^n , где n — хаусдорфова размерность E^n , совпадающая с его топологической размерностью. Следовательно, плотность фрактала F в E^n ведет себя как

$$\mathfrak{S}[F](r) = \mathfrak{S}_0 \times \frac{r^{d_f}}{r^n} = \mathfrak{S}_0 \times r^{d_f-n}, \tag{2.3}$$

где \mathfrak{S}_0 выступает в качестве нормировочной постоянной. Выражение (2.3) играет важную роль в приложениях фрактальной геометрии, когда реальные физические объекты аппроксимируются фрактальными структурами (см. раздел 7).

Определение хаусдорфовой размерности (2.1) приводит к концептуальному обобщению понятия меры в современной геометрии [8]. Действительно, такие классические понятия, как длина, площадь и объем являются не чем иным, как 1-мерой, 2-мерой и 3-мерой множества соответственно. С введением хаусдорфовой размерности (2.1) можно говорить о произвольной действительной мере множества, или его d_f -мере. d_f -мера обладает следующим важным свойством [36]. Единственной ненулевой конечной мерой фрактального множества размерностью d_f является его d_f -мера. В частности: 1) любая d'_f -мера фрактального множества равна нулю при $d'_f > d_f$; 2) любая d'_f -мера фрактального множества равна бесконечности при $d'_f < d_f$. Иллюстрацией является расходимость длины (т.е. 1-меры: $d'_f = 1$) гистограммы, аппроксимирующей статистически самоаффинную кривую на рис. 3.

Необходимо подчеркнуть, что определение хаусдорфовой размерности фрактала (2.1) существенным обра-

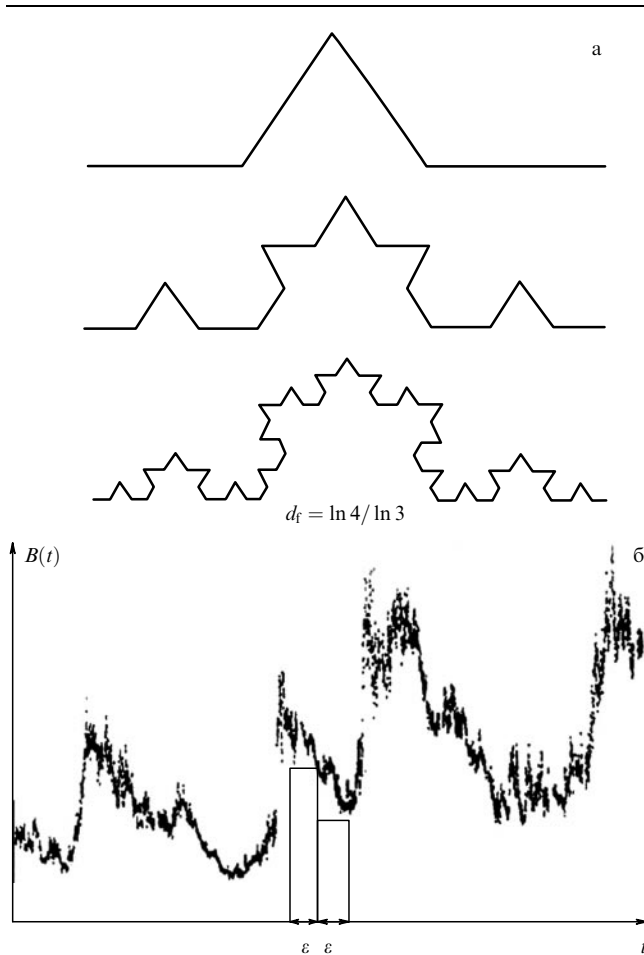


Рис. 2. (а) Последовательные этапы построения кривой Коха. Пределом итеративного процесса служит самоаффинная фрактальная кривая, хаусдорфова размерность которой равна $d_f = \ln 4 / \ln 3$. (б) Пример статистически самоаффинного временного ряда. Зависимость $B(t)$ представляет измерения межпланетного магнитного поля с борта космического аппарата ISEE-3. Аппроксимируя кривую $B(t)$ гистограммой с шагом ε , получим, что длина последней (понимаемая как сумма соответствующих вариаций $\sum_i |B(t_i + \varepsilon) - B(t_i)|$) расходится (при $\varepsilon \rightarrow 0$) по степенному закону $\propto \varepsilon^{-S}$. Хаусдорфова размерность множества точек $B(t)$ равна $d_f = 1 + S$.

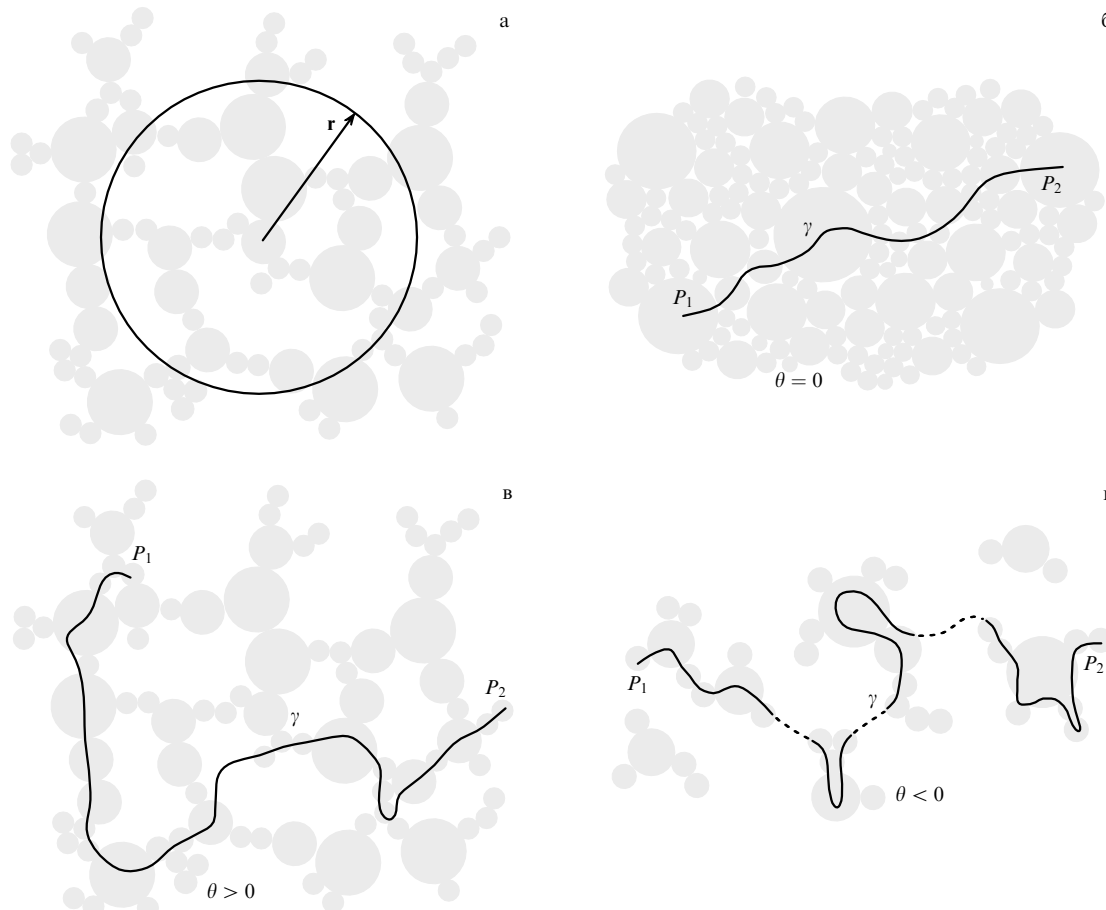


Рис. 3. (а) Определение хаусдорфовой размерности d_f . Число структурных элементов фрактала внутри гиперсферы радиусом r пропорционально r^{d_f} . Определение индекса связности: (б) $\theta = 0$, хаусдорфова размерность геодезической γ , соединяющей точки P_1 и P_2 , равна 1; (в) $\theta > 0$, хаусдорфова размерность геодезической γ , соединяющей точки P_1 и P_2 , с необходимостью больше 1; (г) $\theta < 0$, геодезическая γ , соединяющая точки P_1 и P_2 , всюду разрывна, а ее хаусдорфова размерность строго меньше 1.

зом использует вложение $F \subseteq E^n$. В самом деле, величина d_f определяется через мощность покрытия F n -мерными ε -кубами и в этом смысле является *внешней* характеристикой фрактала, отнесенной к E^n . В то же время хаусдорфова размерность d_f не учитывает *внутренние* топологические свойства фрактального множества, непосредственно не связанные с вложением $F \subseteq E^n$. Данное обстоятельство выражается в том, что хаусдорфова размерность фрактала *не является* топологическим инвариантом, т.е. может изменяться при гомеоморфных (непрерывных взаимно однозначных) отображениях фрактальных структур. Например, кривая Коха на рис. 2а гомеоморфна единичному интервалу \bar{I} , однако ее хаусдорфова размерность $d_f = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,26 \dots$ отлична от $d_f[\bar{I}] = 1$. Последнее обстоятельство связано с тем, что гомеоморфизм кривой Коха на \bar{I} не является гладким (за счет уголков в точках изгиба). При гладких (диффеоморфных) отображениях хаусдорфова размерность d_f сохраняется [16].

2.2. Определение индекса связности

Для описания топологии фрактального множества как такового (безотносительно к вложению в евклидово пространство E^n) введем новую геометрическую характеристику фрактала, называемую *индексом связности*. Пусть P_1 и P_2 — две произвольные точки фрактального множества F , находящиеся в общем положении [37], и пусть γ — путь, соединяющий P_1 и P_2 . (Напомним, что

путем в F называется непрерывное отображение $\gamma: \bar{I} \rightarrow F$ замкнутого единичного интервала $\bar{I} \equiv [0, 1]$ в F .) Точки $P_1 = \gamma(0)$ и $P_2 = \gamma(1)$ отождествим с начальной и конечной точками пути соответственно. Поскольку F — фрактал, то отображение $\gamma: \bar{I} \rightarrow F$ определяет некоторую самоаффинную кривую, лежащую в F . В общем случае существует бесконечное множество путей γ , соединяющих P_1 и P_2 в F . Выберем путь с минимальной хаусдорфовой размерностью. Далее, рассмотрим всевозможные гомеоморфизмы $f: F \rightarrow F'$, переводящие фрактал F во фрактал F' . (Достаточно, чтобы $f: F \rightarrow F'$ не нарушал свойство масштабной инвариантности. Хаусдорфовы размерности фракталов F и F' могут не совпадать: $d_f[F] \neq d_f[F']$.) Очевидно, что образом пути $\gamma \subset F$ при гомеоморфизме f является путь $\gamma' \subset F'$, соединяющий образы точек P_1 и P_2 . Среди всех путей γ' выберем тот, хаусдорфова размерность которого минимальна. Полученное число обозначим d_θ . Имеем

$$d_\theta = \inf_{f: \gamma \rightarrow \gamma'} \inf_{\gamma} d_f[\gamma : P_1 \rightarrow P_2]. \quad (2.4)$$

Параметр d_θ имеет смысл хаусдорфовой размерности *геодезических линий* на F . Представим параметр d_θ в виде $d_\theta \equiv (2 + \theta)/2$. Величину $\theta = \theta[F]$ назовем *индексом связности* фрактального множества F ,

$$\theta = 2(d_\theta - 1). \quad (2.5)$$

Из определения (2.4) следует, что индекс θ является топологическим инвариантом фрактала F . Можно сказать, что параметр θ описывает класс фрактальных множеств, отождествленных между собой посредством гомеоморфных отображений; при этом $\theta[F] = \theta[F']$ для всех $f: F \rightarrow F'$, где f — гомеоморфизм F на F' .

Легко видеть, что индекс связности θ равен нулю для любых гладких множеств, включая евклидовы пространства E^n при $n \geq 1$ (рис. 3б). Действительно, для произвольной гладкой структуры $d_\theta = 1$, откуда $\theta = 0$. Примерами фрактальных множеств, обладающих нетривиальной хаусдорфовой размерностью и нулевым индексом связности, являются самоаффинные фрактальные кривые (скажем, кривая Коха). Условие

$$\theta = 0 \quad (2.6)$$

для самоаффинных фрактальных кривых следует из существования гомеоморфизма $f: \mathcal{I}_S(t) \rightarrow I$ кривой $\mathcal{I}_S(t)$ на открытый единичный интервал $I \equiv (0, 1)$ (или на одномерное евклидово пространство E^1 , эквивалентное I). Если фрактальная кривая содержит точки самопересечений, то отношение гомеоморфности с I нарушается. В этом случае индекс $\theta > 0$.

В размерностях $n \geq 2$ значение индекса связности θ определяется топологией пустот, образуемых множеством F . При этом важно, являются ли пустоты внутренними или внешними. Если F не содержит внутренних пустот, то $\theta[F] = 0$. В этом случае F можно достроить до E^n , "раздувая" фрактал изнутри (подобно воздушному шару, в котором упало давление). Можно утверждать, что для фрактальных кластеров без внутренних пустот $\theta = 0$.

Ситуация кардинально меняется, если существуют внутренние пустоты. Поскольку гомеоморфизм запрещает любые склейки при преобразовании множества, от внутренних пустот избавиться невозможно, какие бы (разрешенные определением) деформации мы ни прикладывали к фракталу. Заметим, что при построении кривой γ внутренние пустоты необходимо огибать на всех пространственных масштабах так, чтобы γ везде лежала в F . Таким образом, кривую γ не удастся выпрямить путем гомеоморфных деформаций фрактала F ; в результате γ остается извилистой линией, хаусдорфова размерность которой ограничена снизу величиной $d_\theta > 1$. Соответственно для фрактальных множеств с внутренними пустотами $\theta > 0$ (рис. 3в).

Рассуждения, приведенные выше, так или иначе предполагают линейную связность множества F . Множество называется линейно связным, если вместе с любыми двумя точками оно содержит путь, соединяющий эти точки [46]. Для линейно связных множеств $d_\theta \geq 1$ и $\theta \geq 0$. Хаусдорфова размерность линейно связного фрактального множества $d_f \geq d_\theta \geq 1$. Для линейно не связных фрактальных (канторовых) множеств имеет место условие $0 \leq d_f < d_\theta < 1$. В силу свойства самоподобия линейно не связное фрактальное множество имеет разрывы в каждой точке; хаусдорфова размерность "пути" γ на всюду разрывных фрактальных структурах должна быть строго меньше единицы (рис. 3г). Из уравнения (2.5) получаем, что для линейно не связных фракталов индекс $\theta < 0$. Наконец, существует интересный класс фрактальных объектов, обладающих хаусдорфовой размерностью $d_f \geq 1$ и отрицательным индексом

связности $\theta < 0$. Такие множества, названные асимптотически линейно связными, рассмотрены в [70].

Следовательно, знак $\text{sign } \theta$ определяется линейной связностью (несвязностью) множества F . Заметим, что линейная связность (несвязность) множества является топологическим инвариантом [46], что согласуется с инвариантностью $\text{sign } \theta$. Инвариантность самого индекса θ при гомеоморфных отображениях $f: F \rightarrow F'$ фрактала на фрактал усиливает утверждение [46] для фрактальных множеств [41].

2.3. Определение спектральной фрактальной размерности

Следуя работе [40], введем следующее аксиоматическое определение спектральной размерности фрактала. Назовем спектральной фрактальной размерностью d_s фрактального множества F отношение хаусдорфовой размерности $d_f = d_f[F]$ к минимальной хаусдорфовой размерности d_θ путей, соединяющих образы точек $P_1 \in F$ и $P_2 \in F$, находящихся в общем положении, при всевозможных гомеоморфизмах $f: F \rightarrow F'$, переводящих фрактал F во фрактал F' . Имеем:

$$d_s \equiv \frac{d_f}{d_\theta} = \frac{2d_f}{2 + \theta}. \quad (2.7)$$

Спектральная фрактальная размерность d_s определяет меру фрактального множества $F \subseteq E^n$ по отношению к минимальной мере путей, позволяющих обойти внутренние пустоты в F . Величина d_s суть "смешанная" характеристика фрактала, учитывающая как свойства вложения $F \subseteq E^n$ в объемлющее евклидово пространство E^n , так и внутреннее устройство фрактального множества.

Легко видеть, что для линейно связных фракталов путь γ , соединяющий произвольные точки $P_1 \in F$ и $P_2 \in F$ фрактального множества F , является подмножеством F , т.е. $\gamma \subseteq F$. Действительно, из общих свойств хаусдорфовой размерности d_f получаем $d_f[\gamma: P_1 \rightarrow P_2] \leq d_f[F]$. При условии линейной связности величина $d_f[\gamma: P_1 \rightarrow P_2]$ ограничена снизу значением d_θ в соответствии с (2.4). Из неравенства $d_f[\gamma: P_1 \rightarrow P_2] \leq d_f[F]$ вытекает $d_\theta \leq d_f$, откуда $d_s \geq 1$. Окончательно, для линейно связных фракталов с учетом (2.5) и (2.7) имеем

$$d_f \geq d_\theta \equiv \frac{2 + \theta}{2} \geq 1, \quad d_s \geq 1. \quad (2.8)$$

Принимая во внимание второе из неравенств (2.8), легко получить $d_f \geq d_s$. Для непрерывных самоаффинных фрактальных кривых без самопересечений из (2.6) следует $\theta = 0$, $d_\theta = 1$, $d_s = d_f \geq 1$. Для линейно не связных фрактальных множеств имеет место соотношение, обратное (2.8):

$$d_f < d_\theta \equiv \frac{2 + \theta}{2} < 1, \quad d_s < 1, \quad (2.9)$$

откуда $d_f < d_s$. Можно показать [40], что спектральная размерность d_s определяет число взаимно ортогональных направлений на фрактальном множестве F . Данное обстоятельство лежит в основе аксиоматического определения фрактального многообразия как наиболее общей концепции фрактальной структуры [40]. В приложениях параметр d_s удобно рассматривать как эффективное дробное число степеней свободы на фрактальной геометрии [23].

2.4. Теорема об универсальном значении

Спектральная размерность стягиваемого фрактального множества на пороге протекания равна $C \approx 1,327 \dots$ для всех $2 \leq n \leq 5$ [40, 70]:

$$d_s = C \approx 1,327 \dots \quad (2 \leq n \leq 5). \tag{2.10}$$

Напомним, что множество F называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $F \rightarrow F$ гомотопно отображению $F \rightarrow F$, переводящему все F в точку [46]. (Гомотопность означает существование непрерывной параметризации, связывающей различные отображения $F \rightarrow F$ в некоторый класс эквивалентности.) Например, шар \bar{D}^n стягиваем при любом $n \geq 1$, в то время как сфера S^{n-1} , стягивающая шар \bar{D}^n , а также тор $T^n \sim S^1 \times \dots \times [n] \dots \times S^1$, диффеоморфный прямому произведению n окружностей S^1 , не стягиваемы — мешают внутренние пустоты. Условие стягиваемости похоже на предположение об отсутствии петель при построении деревьев Кэли в теории среднего поля [21, 22, 37, 39]. Величина C в утверждении теоремы определяется как наименьшее (из двух возможных) решение трансцендентного уравнения [40]

$$C \frac{\pi^{C/2}}{\Gamma(C/2 + 1)} = \pi, \tag{2.11}$$

где Γ обозначает гамма-функцию Эйлера. Теорема об универсальном значении позволяет рассматривать параметр $C \approx 1,327 \dots$ в качестве фундаментальной топологической константы, характеризующей геометрию перколяционного перехода в низких размерностях $2 \leq n \leq 5$. Следуя [41], будем называть величину C "постоянной протекания" (или "константой перколяции"). Постоянная протекания определяет минимальное дробное число степеней свободы, необходимое частице для достижения бесконечно удаленной точки при случайных блужданиях в евклидовом пространстве E^n , размерность которого лежит в интервале от 2 до 5. Множество точек, пройденное частицей, образует при этом перколирующую фрактальную сеть со спектральной размерностью $d_s = C \approx 1,327 \dots$

Общее доказательство теоремы об универсальном значении рассмотрено в [40] и может быть разбито на "легкую" и "трудную" части [70]. Доказательство легкой части требует предварительного введения таких нестандартных понятий, как (замкнутый) d_s -мерный дробный шар \bar{D}^{d_s} и $(d_s - 1)$ -мерная дробная сфера S^{d_s-1} , представляющая собой эффективную — видимую — поверхность шара \bar{D}^{d_s} . В формальной записи

$$\bar{D}^{d_s} : z_1^2 + \dots + z_{d_s}^2 \leq 1, \tag{2.12}$$

$$S^{d_s-1} : z_1^2 + \dots + z_{d_s}^2 = 1, \tag{2.13}$$

где компоненты z_1, \dots, z_{d_s} отвечают "декартовым" координатам в d_s измерениях. Множества \bar{D}^{d_s} и S^{d_s-1} служат примерами *фрактальных многообразий*, характеризующих топологию протекания в статистически однородных изотропных системах [40]. Известные из дифференциальной геометрии гладкие многообразия \bar{D}^n и S^{n-1} можно рассматривать как предел фрактальных многообразий \bar{D}^{d_s} и S^{d_s-1} при $d_s \rightarrow n$. Заметим, что сфера S^{d_s-1} в общем случае *не совпадает* с полной топологической границей $\partial\bar{D}^{d_s}$ шара \bar{D}^{d_s} , поскольку многообразие $\partial\bar{D}^{d_s}$ может содержать элементы, заслоняющие друг друга. Видимая поверхность $S^{d_s-1} \subseteq \partial\bar{D}^{d_s}$ является в этом

случае подмножеством $\partial\bar{D}^{d_s}$. Соответственно для хаусдорфовых размерностей $d_f[S^{d_s-1}]$ и $d_f[\partial\bar{D}^{d_s}]$ имеем $d_f[S^{d_s-1}] \leq d_f[\partial\bar{D}^{d_s}]$. При целых $d_s = n$ стандартная сфера $S^{n-1} \sim \partial\bar{D}^n$, откуда $d_f[S^{n-1}] = d_f[\partial\bar{D}^n] = n - 1$.

Центральный момент заключается в построении пути $\tilde{\gamma}$, всюду плотно покрывающего шар \bar{D}^{d_s} так, чтобы пройти через каждую его точку один и только один раз (рис. 4). Ниже порога указанное построение невозможно, поскольку множество \bar{D}^{d_s} будет по определению линейно не связным; кривая $\tilde{\gamma}$ в этом случае всюду разрывна. Выше порога перколирующая область становится "слишком обширной"; обход такой области напоминает построение кривой Пеано, с неизбежностью содержащей точки самопересечений. Можно сказать, что на пороге протекания шар \bar{D}^{d_s} неотличим от пути $\tilde{\gamma}$, с существованием которого связан перколяционный переход в системе.

Далее, легко видеть, что $\tilde{\gamma}$ опирается на тот же самый телесный угол, что и весь шар \bar{D}^{d_s} ; данный угол, однако, не может быть меньше π (т.е. телесного угла в основании полуокружности) (см. рис. 4). Утверждение следует из анализа всевозможных непрерывных деформаций кривой $\tilde{\gamma}$, концы которой закреплены на противоположных полюсах сферы S^{d_s-1} [40]. Принимая во внимание, что сфера S^{d_s-1} видна из центра шара \bar{D}^{d_s} под телесным углом

$$\Omega_{d_s} \equiv d_s \frac{\pi^{d_s/2}}{\Gamma(d_s/2 + 1)}, \tag{2.14}$$

находим $\Omega_{d_s} \geq \pi$. С другой стороны, условие критичности (т.е. минимальности перколирующего множества) требует $\Omega_{d_s} = \min$, откуда $\Omega_{d_s} = \pi$. Из полученного соотношения очевидно тождество (2.11). Заметим, что условие $\Omega_{d_s} = \min = \pi$ можно рассматривать как топологическое определение порога протекания.

Вложения дробных сфер в евклидово пространство E^n обсуждаются в трудной части теоремы, где получено общее ограничение $2 \leq n \leq 5$ на топологическую размерность n [40]. Доказательство ограничения $2 \leq n \leq 5$ основано на построении гладкого двумерного многообразия, "обволакивающего" \bar{D}^{d_s} , с последующим применением слабой теоремы Уитни о вложениях [45].

В обычном трехмерном пространстве дробный шар можно наглядно представить как крону раскидистого дерева, которая хотя и спасает от прямых солнечных лучей, но все же пропускает достаточно света, чтобы

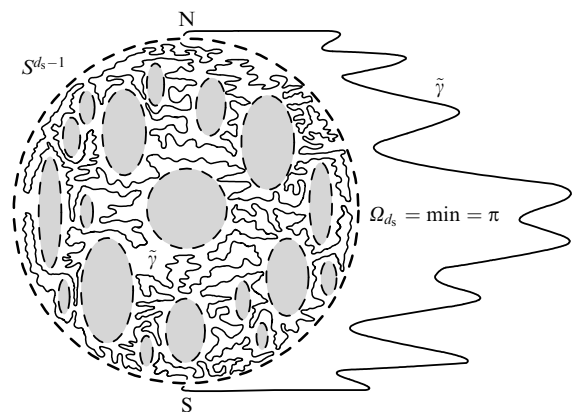


Рис. 4. Построение предельного пути $\tilde{\gamma}$, всюду плотно покрывающего шар \bar{D}^{d_s} на пороге протекания.

разглядеть небо. Чтобы увидеть только крону (без неба), достаточно меньшего числа степеней свободы, чем размерность объемлющего пространства. Однако, чтобы крона заслоняла весь горизонт, число степеней свободы не может быть слишком малым. Существует некоторое оптимальное число степеней свободы, когда вы впервые наблюдаете всю крону, получая максимум солнечного света. Данное число и определяет спектральную размерность фрактала в точке перколяционного перехода $C \approx 1,327 \dots$

2.5. Теорема о фрактальной границе

На пороге протекания топологическая граница $\partial \bar{D}^{d_s}$ всюду плотна в шаре \bar{D}^{d_s} [42, 43].

Другими словами, перколирующее фрактальное множество \bar{D}^{d_s} в точке перехода состоит целиком из своей границы: $\bar{D}^{d_s} \sim \partial \bar{D}^{d_s}$. Действительно, $\partial \bar{D}^{d_s}$ совпадает с кривой $\tilde{\gamma}$, покрывающей \bar{D}^{d_s} всюду плотно. Следствием теоремы о фрактальной границе является равенство хаусдорфовых размерностей $d_f \equiv d_f[\bar{D}^{d_s}] = d_f[\partial \bar{D}^{d_s}] = d_f[\tilde{\gamma}]$ на пороге протекания.

Как уже отмечалось (см. раздел 2.4), мощность фрактального множества в точке перехода не может быть слишком большой, иначе путь $\tilde{\gamma}$, обеспечивающий всюду плотное покрытие шара \bar{D}^{d_s} , с неизбежностью включает точки самопересечений. Соответствующее ограничение на хаусдорфову размерность d_f получено в [43]:

$$1 \leq d_f \leq S_n \equiv \frac{\ln(3^n - 1)}{\ln 3} \quad (2 \leq n \leq 5). \quad (2.15)$$

Параметр $S_n \equiv \ln(3^n - 1)/\ln 3$ в правой части (2.15) представляет собой хаусдорфову размерность множества, прозванного *канторовым сыром*. Для его "приготовления" берется дополнение к множеству, возникающему при n -кратном перемножении дополнений к *канторовой пыли*, — канторову множеству "выброшенной одной трети" [28, 71]. Двумерный ($n = 2$) канторов сыр называют также *ковром Серпинского*: $S_2 \equiv \ln 8/\ln 3 \approx 1,89 \dots$. Ковр Серпинского обладает уникальным свойством: любая *линия*, вложимая в плоскость E^2 , вложима и в ковер Серпинского. Данное свойство позволяет рассматривать ковер Серпинского в качестве *универсальной линии* на плоскости [71]. (Напомним, что *линией* в топологии называется гомеоморфизм отрезка $I \sim [0, 1]$. Путь, не имеющей точек самопересечения, является линией.) Поскольку $S_2 < 2$, то в природе *не существует* линии, покрывающей E^2 всюду плотно. Как известно [71], всюду плотное покрытие плоскости достигается за счет отказа от глобальной гомеоморфности и перехода к кривым Пеано, имеющим счетное число точек самопересечения. Можно сказать, что величина $S_n \equiv \ln(3^n - 1)/\ln 3$ определяет хаусдорфову размерность максимального фрактального множества, которое можно обойти без самопересечений в пространстве E^n . Интересно, что существует линия, обходящая E^∞ ; утверждение вытекает из $\lim_{n \rightarrow \infty} [n/S_n] = 1$.

3. Странные процессы переноса

3.1. Процессы переноса на самоподобных фрактальных структурах

Рассмотрим случайное блуждание точечной частицы по самоподобному фрактальному множеству F , вложен-

ному в евклидово пространство E^n размерностью $n \geq 2$. Пусть k — эффективное число степеней свободы на F . Ясно, что $k \leq n$ в силу вложения $F \subseteq E^n$. По смыслу спектральной размерности d_s (определяющей число взаимно ортогональных направлений на F), $k \equiv d_s$.

Предположим, что частица начинает свое путешествие из начала координат $\mathbf{r} = 0$ в момент времени $t = 0$. В k измерениях вероятность возвращения частицы в исходную точку $\mathbf{r} = 0$ по истечении времени $t > 0$ равна, с точностью до нормировочной постоянной [72],

$$\psi(t, 0) \sim t^{-k/2}. \quad (3.1)$$

Соответственно число структурных элементов множества F , которые частица успеет посетить за время t , составит по порядку величины

$$\aleph(t) \sim \frac{1}{\psi(t, 0)} \sim t^{k/2}. \quad (3.2)$$

Характерный размер $r(t)$ области, в которой побывает частица к моменту времени t , легко оценить из соотношения (2.3) для плотности фрактала F в E^n : имеем $\aleph(t) \sim r^n \mathfrak{Z}[F](r) \sim [r(t)]^{d_f}$, где $d_f = d_f[F]$. Следовательно,

$$r(t) \sim [\aleph(t)]^{1/d_f} \sim t^{k/2d_f}. \quad (3.3)$$

Учитывая тождество $k \equiv d_s$, из (2.7) находим

$$r(t) \sim t^{1/(2+\theta)}, \quad (3.4)$$

где $\theta \equiv \theta[F]$ — индекс связности множества F . Среднеквадратическое удаление частицы от начала координат растет с t как

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = 2\mathcal{D} \times t^\mu, \quad (3.5)$$

причем нормировочная постоянная \mathcal{D} имеет смысл *обобщенного коэффициента переноса*, а показатель степени при t равен

$$\mu = \frac{d_s}{d_f} = \frac{2}{2+\theta}. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) было впервые получено в [59] из феноменологического анализа DC-проводимости (т.е. проводимости по постоянному току) перколяционных кластеров. Согласно (2.5), показатель μ есть не что иное, как обратная хаусдорфова размерность геодезических линий на F , а именно $\mu = 1/d_\theta$. Подчеркнем, что значение $\mu = d_s/d_f$ подчиняется сугубо индексу связности множества F и *не зависит* от хаусдорфовой размерности d_f . Действительно, как явствует из (2.7), спектральная размерность $d_s = 2d_f/(2+\theta)$ пропорциональна хаусдорфовой размерности d_f , откуда $\mu = 2/(2+\theta)$. По смыслу (2.4) величина μ является *инвариантным* (относительно гомеоморфизмов $f: F \rightarrow F'$) параметром, характеризующим топологию пустот в F . Соответственно, выражение (3.6) приводит нас к следующему важному заключению [42]. *Поведение процессов переноса на самоподобных фрактальных множествах регулируется топологическими инвариантами этих множеств.*

С топологической инвариантностью знака $\text{sign } \theta$ (см. раздел 2) можно отождествить существование *качествен-*

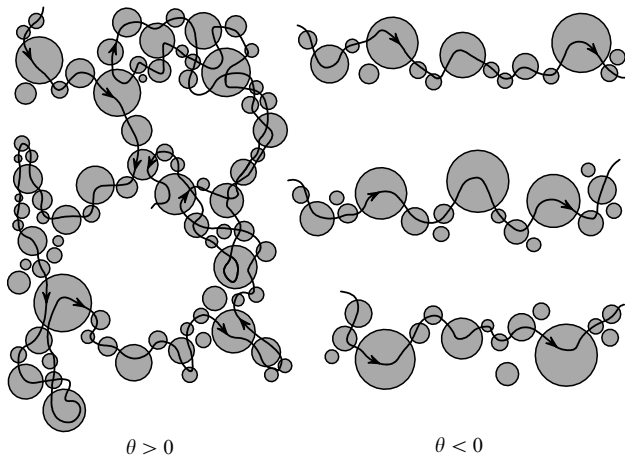


Рис. 5. Поведение процессов переноса на самоподобных фрактальных структурах при положительных ($\theta > 0$) и отрицательных ($\theta < 0$) значениях индекса связности.

ных различий в кинетике переноса при положительных и отрицательных значениях индекса связности. Множество F при $\theta > 0$ с необходимостью содержит внутренние пустоты, на обгибание которых частица тратит значительную часть времени. Причиной "задержек" могут стать многократные — "циклические" — обходы пустот, а также блокировка частиц во внутренних "тупиках" (рис. 5). Поскольку при положительных $\theta > 0$ множество F по определению линейно связное, абсолютно все точки, лежащие на F , доступны для частиц. Пробираясь "вглубь" F , частица имеет шанс "заблудиться" в сложных переходах, обрамляющих внутренние пустоты, и в конце концов вернуться к началу своего путешествия. Никакого долгосрочного вклада в среднеквадратическое смещение $\langle r^2(t) \rangle$ такое путешествие не даст. В результате рост $\langle r^2(t) \rangle$ отстает от динамического времени t , что приводит к отклонению показателя μ от 1 в меньшую сторону, $\mu < 1$. Напротив, при $\theta < 0$ распространение частиц по F ограничено компонентами связности, при этом собственно о явлениях переноса можно говорить лишь в контексте асимптотически линейно связных множеств [70], для которых хаусдорфова размерность $d_f \geq 1$. (При $d_f < 1$ множество F всюду разрывно, а понятие среднеквадратического смещения $\langle r^2(t) \rangle$ теряет естественный смысл.) Асимптотически линейно связные фракталы сочетают в себе свойства связности и несвязности; их можно представить как несвязный набор линейно связных подмножеств. Поскольку хаусдорфова размерность каждого из таких подмножеств не может быть меньше 1, у частиц есть право свободно мигрировать вдоль F , оставаясь в пределах "своей" компоненты связности (см. рис. 5). Покидать выбранную компоненту им запрещено ввиду общей несвязности фрактала: $\theta < 0$. Последнее условие ограничивает возможности частиц "поблуждать" в пространстве, и им приходится в целом более "дисциплинированно" удаляться от своего начального положения. На микроскопическом уровне процесс выглядит скорее как баллистический, чем диффузионный, при этом рост $\langle r^2(t) \rangle$ опережает время t , а показатель степени μ в (3.5) становится больше 1, $\mu > 1$.

Соотношение (3.5) описывает богатый спектр странных процессов переноса в нелинейных динамических системах. В узком смысле термин "странный перенос"

предполагает нелинейную ($\mu \neq 1$) зависимость среднеквадратического смещения точечной частицы $\langle r^2(t) \rangle$ от времени t . В широком смысле о странном переносе говорят всякий раз, когда речь идет о негауссовых процессах, допускающих корреляции на сколь угодно больших пространственно-временных масштабах. Странные процессы вида (3.5) обнаружены, в частности, в лабораторной плазме [63, 73, 74], турбулентных жидкостях выше некоторого порогового значения числа Рейнольдса \mathcal{R}_* (~ 15) [75, 76], замагниченных вихревых потоках [77, 78] и др. Приложения теории странных процессов к космической электродинамике охватывают динамические явления в солнечной фотосфере [79], на дневной магнитопаузе [64], в хвосте магнитосферы Земли [49]. Эффекты, связанные с конечностью корреляционной длины для "реальных" фрактальных структур, обсуждались в [64, 80].

3.2. Субдиффузия и супердиффузия

Отвлекаясь от кинетики неравновесных систем, отметим, что в теории турбулентности обычно рассматривают странные процессы переноса (3.5) с показателем μ , лежащим в пределах от 0 до 2,

$$0 \leq \mu \leq 2. \quad (3.7)$$

При $0 \leq \mu < 1$ говорят о субдиффузионных процессах переноса, а при $1 < \mu \leq 2$ — о супердиффузионных процессах. Введем также понятие супербаллистического процесса, соответствующего условию $\mu > 2$ [81]. Супербаллистические процессы предполагают ускорение частиц вдоль траекторий [81]. Ряд физических реализаций рассмотрен в [82, 83]. Динамика ускорения в турбулентных средах обсуждается более подробно в разделе 8.

Наравне с параметром μ в литературе часто используется показатель H , связанный с μ соотношением

$$\mu = 2H. \quad (3.8)$$

В контексте фрактальных обобщений [9] случайного броуновского движения [72] величину H называют показателем Херста. При условии (3.7) имеем

$$0 \leq H \leq 1. \quad (3.9)$$

Легко видеть, что субдиффузионные процессы отвечают значениям $0 \leq H < 1/2$, а супердиффузионные — значениям $1/2 < H \leq 1$. Величина H определяет фрактальную размерность траекторий частиц в области турбулентности [59]:

$$d_w = \frac{1}{H} \quad (d_w \geq 1). \quad (3.10)$$

Комбинируя (3.6), (3.8) и (3.10), выразим параметр d_w через индекс связности фрактального множества F :

$$d_w = 2 + \theta. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) устанавливает зависимость между динамическими (d_w) и структурными (θ) характеристиками процессов переноса в средах с фрактальной геометрией. Поскольку динамические траектории линейно связны (здесь мы не рассматриваем квантовомеханические эффекты, допускающие нарушение линейной связности вдоль траекторий), величина d_w не может быть меньше 1. Таким образом, в интерпретации классической

физики перенос возможен лишь на множествах, индекс связности которых $\theta \geq -1$. В зависимости от величины θ значение $d_w = 2 + \theta$ может превосходить размерность пространства вложения ($n = 2$ для процессов переноса на плоскости). Объяснение заключается в существовании у динамической траектории (множественных) точек самопересечения, вклад которых в d_w пропорционален их кратности. При нулевой связности $\theta = 0$ процесс переноса становится диффузионным:

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = 2D \times t^1. \quad (3.12)$$

Среднеквадратическое смещение частиц растет в этом случае линейно со временем; параметры μ , H и d_w равны соответственно

$$\mu = 1, \quad H = \frac{1}{2}, \quad d_w = 2. \quad (3.13)$$

Последнее из равенств (3.13) показывает, что мощности диффузионных траекторий достаточно для всюду плотного покрытия плоскости E^2 — знаменитое свойство кривых Пеано! В евклидовых пространствах E^n процесс (3.12) предполагает *гауссовы* приращения $d\mathbf{r}(t)$ величины $\mathbf{r}(t)$. Соответствующее кинетическое (диффузионное) уравнение, характеризующее эволюцию функции распределения частиц $\psi = \psi(t, \mathbf{r})$, имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta_{\mathbf{r}}(\mathcal{B}\psi), \quad (3.14)$$

где $\Delta_{\mathbf{r}} \equiv \partial^2 / \partial \mathbf{r}^2$ — оператор Лапласа в E^n и $\mathcal{B} = \mathcal{D}/n$. Напомним, что функция $\psi(t, \mathbf{r})$ определяется как плотность вероятности найти частицу в точке \mathbf{r} в момент времени t . В кинетическом уравнении (3.14) использовано условие нормировки

$$\int \psi(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (3.15)$$

Уравнения (3.13) и (3.14) описывают процесс диффузии как (гауссово) броуновское движение частицы в E^n [72].

3.3. Процессы переноса на пороге протекания

Рассмотрим теперь специальный случай, предполагающий критичность фрактальной геометрии множества F в контексте перколяционного перехода. Согласно (2.10) значение спектральной размерности d_s на пороге протекания равно $C \approx 1,327\dots$. Соответственно из (3.6) находим

$$\mu = 2H = \frac{C}{d_f}. \quad (3.16)$$

Как явствует из (3.16), для вычисления показателя μ достаточно найти хаусдорфову размерность d_f фрактального множества F , на котором сконцентрированы процессы переноса. Комбинируя (2.15) и (3.16), получим ограничение на параметр μ :

$$\frac{C}{S_n} \leq \mu \leq C, \quad (3.17)$$

имеющее сугубо *топологическую* природу. Соответственно для показателя H имеем

$$\frac{C}{2S_n} \leq H \leq \frac{C}{2}. \quad (3.18)$$

Объемлющая размерность n в (3.17), (3.18) может изменяться от 2 до 5. Таким образом, процессы переноса на пороге протекания являются *субдиффузионными* ($C/2S_n \leq H < 1/2$) при $C < d_f \leq S_n$ и *супердиффузионными* ($1/2 < H \leq C/2$) при $1 \leq d_f < C$. Интересно, что верхняя граница показателя H , равная

$$H_{\max} = \frac{C}{2} \approx 0,66\dots \sim \frac{2}{3}, \quad (3.19)$$

не зависит от объемлющей размерности $2 \leq n \leq 5$. При $d_f = C$ из (3.16) находим $H = 1/2$. Следовательно, *процессы переноса на перколирующем фрактальном множестве F , хаусдорфова размерность которого равна постоянной протекания: $d_f[F] = C$, ведут себя как диффузионные* [84], а именно: $\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle \sim t$. Полученный результат раскрывает физический смысл параметра C .

Необходимо подчеркнуть, что диффузионные процессы на перколирующих фрактальных структурах существенно *не гауссовы* (в отличие от диффузии (3.14) в евклидовых пространствах E^n). Линейная зависимость (3.12) среднеквадратического смещения частиц от времени достигается в этом случае за счет сложной "игры" корреляций, действующих на сколь угодно больших пространственных масштабах $r \rightarrow \infty$. Диффузионные процессы на F являются, таким образом, *странными* в широком смысле. Уравнение (3.14) для странных (негауссовых) диффузионных процессов (3.12) *несправедливо!*

Последовательный учет корреляций требует отказа от гауссова диффузионного уравнения (3.14) и традиционного представления о процессах переноса как о случайном броуновском движении частиц в среде [85]. Необходимые обобщения достигаются за счет использования методов *странной*, или *дробной*, динамики [86] — мощного аналитического аппарата, адекватного сложным нелинейным системам с многомасштабными корреляциями в пространстве и во времени. (Наравне с термином "дробная динамика" в литературе используется также термин "странная кинетика", введенный в [86].) Уравнения в дробных производных, применяемые в "странной" кинетике, учитывают эффекты *памяти*, *нелокальности* и *перемежаемости*, выходящие далеко за пределы традиционной гауссовой статистики (3.14). Моделями странных кинетических явлений в турбулентных средах служат процессы Леви [85, 87] и случайные блуждания во фрактальном времени (fractal time random walks) (СБФВ) [87–89], включая обобщенное (фрактальное) броуновское движение, обнаруженное Мандельбротом и Ван Нессом [9, 90]. Феноменологическое описание процессов турбулентного переноса на основе дробной динамики получено в [62, 91]. Трудности, возникающие при выводе соответствующих кинетических уравнений из микроскопических характеристик движения отдельных частиц, обсуждались в [92–95]. Термодинамическое обоснование дробной динамики дано в [96]. Мультифрактальные обобщения предложены в [97, 98]. Самосогласованному анализу странных кинетических процессов вблизи НСС посвящены работы [47, 99].

Математический формализм, лежащий в основе дробной динамики, в известном смысле эквивалентен методу обобщенного характеристического уравнения [92, 100]. Данный подход чрезвычайно привлекателен, поскольку не нарушает аналитическую структуру важнейших уравнений математической физики. В частности, решение граничных задач, исследование кинетических

процессов во внешнем поле, а также вычисление моментов функций распределения частиц вполне аналогичны стандартным аналитическим алгоритмам.

В заключение отметим, что применение странной кинетики в современной теоретической и математической физике отнюдь не ограничивается эффектами турбулентного переноса. Широкий круг явлений, адекватных идеологии дробного дифференциального исчисления, рассмотрен в [92, 94, 101, 102]. В разделе 11 мы познакомимся с дробным динамическим уравнением [43], описывающим *фрактонные возмущения* в нерегулярных системах. Исследование модуляционной неустойчивости фрактонных мод, и притом с учетом дифракции, приводит к дробному обобщению параболического уравнения, частным случаем которого является дробное нелинейное уравнение Шрёдингера, допускающее решения, аналогичные солитонам огибающих в средах с евклидовой геометрией. Интерес к фрактонам во многом связан с физикой высокотемпературных сверхпроводников [103], а также с явлением сверхпроводимости в сложных молекулярных соединениях, например, самоорганизующихся органических полимерах [43]. Пространственное распределение параметра порядка, отвечающего сверхпроводящей фазе в "самоорганизующихся" материалах, может подчиняться уравнению, представляющему собой дробное обобщение известного из теории фазовых переходов уравнения Гинзбурга – Ландау [104].

4. Дробное кинетическое уравнение

4.1. Формулировка уравнения

Следуя общим принципам странной кинетики [92, 93], рассмотрим *дробное уравнение переноса*, обобщающее (3.14) на случай динамических систем с многомасштабными корреляциями:

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = \nabla_{\mathbf{r}}^{2\beta} (\mathcal{B}\psi). \quad (4.1)$$

Во избежание излишних усложнений параметр \mathcal{B} в уравнении (4.1) будем считать не зависящим от координат. Члены с адвекцией для простоты опущены. Радиус-вектор \mathbf{r} пробегает точки, лежащие на перколирующем фрактальном множестве F , вложенном в евклидово пространство E^n размерностью $n \geq 2$: $\{\mathbf{r}\} \sim F \subset E^n$. Внешнее поле в (4.1) предполагается равным нулю. Уравнение (4.1) записано в обобщенных (дробных) производных как по времени t , $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$, так и по пространственной (фазовой) переменной \mathbf{r} , $\nabla_{\mathbf{r}}^{2\beta} \equiv \partial^{2\beta} / \partial \mathbf{r}^{2\beta}$. Введение дробных производных $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$ и $\partial^{2\beta} / \partial \mathbf{r}^{2\beta}$ в кинетическое уравнение (4.1) позволяет учесть эффекты памяти (α) и нелокальности (β) в контексте единого математического формализма.

4.2. Дробная производная по времени

Дробная производная по времени $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$ в левой части уравнения (4.1) выражается через *оператор Римана-Лиувилля* [27]

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \int_0^t \frac{d\vartheta}{(t - \vartheta)^{1+\alpha-m}} \psi(\vartheta, \mathbf{r}), \quad (4.2)$$

где $m - 1 < \alpha \leq m$ при некотором целом m . (В дальнейшем нас будут интересовать значения α , лежащие в интервале от 0 до 2.) Нижний предел интегрирования $t = 0$ в (4.2) фиксирует момент времени t , с которого начинается отсчет динамических явлений в среде; данный выбор во многом носит условный характер. В силу *тождества Абеля* [105] дробная производная (4.2) переходит в обычную "целую" производную $\partial \psi / \partial t$ при $\alpha \rightarrow 1$. В статическом пределе $\alpha \rightarrow 0$ из соотношения (4.2) вытекает $\partial^0 \psi(t, \mathbf{r}) / \partial t^0 \equiv \psi(t, \mathbf{r})$. При целых отрицательных значениях $\alpha = -n$ производная $\partial^{-n} \psi(t, \mathbf{r}) / \partial t^{-n}$ воспроизводит n -кратный интеграл по t . Отвлекаясь от строгих формулировок, можно сказать, что $(-n)$ -кратное дробное дифференцирование эквивалентно α -кратному дробному интегрированию; в определенном смысле операции дробного дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными. Систематическое изложение *дробного дифференциального исчисления* можно найти в монографиях [100, 102, 106, 107].

Введение дробной производной $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$ в кинетическое уравнение (4.1) позволяет учесть *случайные блуждания во фрактальном времени* (СБФВ) – "временную составляющую" странных динамических процессов в турбулентных средах [92]. Отличительной особенностью СБФВ служит отсутствие каких-либо заметных скачков в поведении частиц; при этом среднеквадратическое смещение ($\mathbf{r}^2(t)$) растет с t как t^α . Из соотношения (3.5) находим $\mu = \alpha$. Параметр α имеет смысл фрактальной размерности "активного" времени, в котором реальные блуждания частиц выглядят как случайный процесс; интервал активного времени пропорционален t^α .

В зависимости от конкретного значения α различают *персистентные* (супердиффузионные, $1 < \alpha \leq 2$) и *антиперсистентные* (субдиффузионные, $0 \leq \alpha < 1$) процессы. В случае антиперсистентного процесса активное время представляет собой канторово множество ($0 \leq \alpha < 1$), содержащее разрывы в каждой точке луча t . Разрывы соответствуют тем моментам времени, в которые частица очередной раз "застревает" в турбулентном поле. Статистической моделью антиперсистентного процесса служит степенное распределение времен ожидания $\phi(\tau) \propto 1/\tau^{1+\alpha}$ между последовательными смещениями частиц в конфигурационном пространстве $\{\mathbf{r}\}$. Напротив, персистентные процессы предполагают более быстрое течение ($1 < \alpha \leq 2$) активного времени по сравнению с реальным временем t . Активное время в случае персистентного процесса можно "уложить" на непрерывную самоаффинную кривую, "висящую" над лучом t . Соответствующие динамические явления протекают в ускоренном ритме, не позволяющем частицам подолгу задерживаться в разных "интересных" точках турбулентной области. Построение адекватного теоретико-вероятностного обоснования персистентных процессов в настоящее время далеко от завершения. Следуя [9], получим коррелятор

$$\mathcal{O}(t) \equiv - \frac{\langle \delta \mathbf{r}(-t) \delta \mathbf{r}(t) \rangle}{\langle \delta \mathbf{r}^2(t) \rangle} \quad (4.3)$$

прошлых и будущих приращений радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ при случайных блужданиях во фрактальном времени:

$$\mathcal{O}(t) = 2^{\alpha-1} - 1 \equiv \text{const}(t). \quad (4.4)$$

Как явствует из (4.4), корреляционная функция $\mathcal{O}(t)$ принимает *постоянное* — зависящее исключительно от параметра α — значение на произвольных (сколь угодно больших) временах t . О постоянстве корреляционной функции $\mathcal{O}(t)$ говорят как о свойстве персистентности [9] — сохранении тенденций в поведении временного ряда, представляющего динамические флуктуации величины $\mathbf{r}(t)$. Выполнение свойства персистентности подразумевает, что корреляции не расцепляются ни на каких временах, т.е. всплески и падения временного ряда $\delta\mathbf{r}(t)$ взаимозависимы при всех $-\infty \leq t \leq +\infty$.

Персистентные (антиперсистентные) процессы во фрактальном времени отвечают положительной (отрицательной) корреляционной функции $\mathcal{O}(t)$ и соответствуют супердиффузионным (субдиффузионным) процессам переноса в турбулентной области. При $\alpha \neq 1$ СБФВ являются существенно немарковскими процессами (так как в этом случае $\mathcal{O}(t) \neq 0$ для любого интервала времени t). Немарковость — т.е. память системы о своем прошлом [72] — выражается в присутствии нелокального ядра $(t - \vartheta)^{-(1+\alpha-m)}$ в операторе Римана–Лиувилля (4.2). В марковском пределе $\alpha \rightarrow 1$ имеем $\mathcal{O}(t) \equiv 0$ (нет корреляций между прошлыми и будущими приращениями величины $\mathbf{r}(t)$); при этом интегро-дифференциальный оператор (4.2) суть целая (локальная по времени) производная $\partial/\partial t$.

4.3. Дробная производная по пространственной переменной

Перейдем теперь к анализу "пространственной составляющей" странных процессов переноса, отвечающей операции $\nabla_{\mathbf{r}}^{2\beta}$ в кинетическом уравнении (4.1). Не умаляя общности, будем считать, что параметр 2β изменяется в пределах от 1 до 2. Разложим \mathbf{r} по базису из декартовых координат x_i в E^n . Имеем $\mathbf{r} = \mathbf{e}^i x_i$, где \mathbf{e}^i — единичный вектор в направлении $i = 1, \dots, n$. (По повторяющимся индексам i предполагается суммирование.) Производной $\partial^\beta/\partial x_i^\beta$ дробного порядка β назовем интегро-дифференциальный оператор, определяемый согласно

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x_i^\beta} \psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{x_i} \frac{dx'_i}{(x_i - x'_i)^\beta} \psi(t, \mathbf{r}'). \quad (4.5)$$

В отличие от (4.2), интегрирование в (4.5) начинается не от нуля, а от минус бесконечности; данная "нормировка" связана с предположением о том, что множество $F \subset E^n$ *перколирует*, т.е. содержит сколь угодно большие пространственные масштабы. Интегро-дифференциальный оператор (4.5) с бесконечным нижним пределом интегрирования принято называть *оператором Рисса–Вейля* [92]. Как и оператор Римана–Лиувилля, оператор Рисса–Вейля корректно воспроизводит понятие целой производной по x_i при $\beta \rightarrow 1$. Вместе с тем несобственный характер интегрирования в (4.5) значительно "улучшает" аналитические свойства оператора Рисса–Вейля за счет обнуления соответствующих подстановок от нижнего предела [94]. Рассматривая $\partial^\beta/\partial x_i^\beta$ как компоненты вектора $\partial^\beta/\partial \mathbf{r}^\beta$, получим естественное обобщение градиента: $\nabla_{\mathbf{r}}^\beta \equiv \partial^\beta/\partial \mathbf{r}^\beta \equiv \mathbf{e}^i \partial^\beta/\partial x_i^\beta$. Операцию $\nabla_{\mathbf{r}}^{2\beta}$ определим как *скалярный квадрат* $\nabla_{\mathbf{r}}^\beta \nabla_{\mathbf{r}}^\beta$ в базисе $\{\mathbf{e}^i\}$. В формальной записи $\nabla_{\mathbf{r}}^{2\beta} \equiv \partial^{2\beta}/\partial \mathbf{r}^{2\beta} \equiv \delta^{ik} \partial^{2\beta}/\partial x_i^\beta \partial x_k^\beta$, где символ Кронекера $\delta^{ik} \equiv \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k$ задает компоненты метрического тензора в декартовых координатах. Скалярное произведение операторов дробного дифференцирования

$\nabla_{\mathbf{r}}^{2\beta} \equiv \nabla_{\mathbf{r}}^\beta \nabla_{\mathbf{r}}^\beta$ можно рассматривать как обобщенный лапласиан. При $\beta \rightarrow 1$ имеем $\Delta_{\mathbf{r}} \equiv \nabla_{\mathbf{r}}^2$. Заметим, что определение (4.5) имеет смысл при всех $0 \leq \beta < 1$; ограничение $1 \leq 2\beta < 2$ наложено для того, чтобы скалярное произведение $\nabla_{\mathbf{r}}^\beta \nabla_{\mathbf{r}}^\beta$ обладало более простой аналитической структурой. Обобщение на случай $0 \leq 2\beta < 1$ не представляет труда, однако в контексте уравнения (4.1) нами обсуждаться не будет. Впервые уравнение переноса с лапласианом дробного порядка $\Delta_{\mathbf{r}}^{1/3}$ было исследовано Мониным [108, 109] в рамках теории Колмогорова K41: $2\beta = 2/3$.

Дробный оператор Рисса–Вейля отвечает *процессам Леви* в пространстве переменной $\{\mathbf{r}\}$. Процессы Леви являются марковскими — они не знают своей истории, однако обладают свойством *нелокальности* — воспринимают целые области фазового пространства просто как точки. Динамика частиц в таких областях выглядит как мгновенные скачки — "полеты Леви" — из одной точки в другую. Скачкам соответствует сингулярное ядро $(x_i - x'_i)^{-\beta}$ под знаком интеграла в уравнении (4.5). Вероятность скачка на длину ℓ подчиняется *распределению Леви* [92], имеющему степенной вид $\phi(\ell) \propto 1/\ell^{1+2\beta}$. Для сравнения, блуждания во фрактальном времени предполагают экспоненциально быстрое затухание вероятности $\phi(\ell) \propto \exp(-\ell^2)$, обеспечивающее непрерывность СБФВ по \mathbf{r} . Процессы Леви, таким образом, допускают заметные скачки с намного большей вероятностью, чем СБФВ. Следствием такого положения дел является неприятная *расходимость* среднеквадратического смещения частиц в статистике Леви [92]: $\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle \rightarrow \infty$.

Реальные частицы, обладающие конечной массой, мгновенные перелеты из одной точки пространства в другую, конечно же, не выполняют. К статистике Леви следует соответственно подходить как к удобной модели, описывающей явления быстрого когерентного переноса в турбулентных средах, например, конвекцию частиц вместе с подхватившим их циклоном. Расходимость среднеквадратического смещения в процессах Леви может быть устранена наложением определенных пространственно-временных связей, вынуждающих частицы "более спокойно" перемещаться в пространстве [92]. Процессы Леви со связями обычно называют *блужданиями Леви*. Дробное кинетическое уравнение для блужданий Леви получено в [110] из условия о движении частиц со скоростью не выше заданной. Альтернативный подход основан на интегрировании кинетических уравнений для свободных процессов Леви в воображаемой нестационарной области, расширяющейся с течением времени [111]. Обойти проблему расходимости можно также с помощью дробного условия нормировки, переопределяющего полную вероятность в статистике Леви [70]. Данное условие должно быть согласовано с фрактальной геометрией множества F .

4.4. Дробное условие нормировки и радиальная часть обобщенного лапласиана

Действительно, ограничим действие дробного оператора Лапласа $\nabla_{\mathbf{r}}^{2\beta} \equiv \partial^{2\beta}/\partial \mathbf{r}^{2\beta}$ на d_s -мерное фрактальное подмножество $F \subset E^n$ евклидова пространства E^n . В качестве самосогласованного условия нормировки, налагаемого на функцию $\psi(t, \mathbf{r})$, выберем

$$\int_F \psi(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}^\beta = 1. \quad (4.6)$$

Условие (4.6) регулирует полеты Леви (β) в "воздушном пространстве" фрактального множества F (за счет \int_F). Далее, оператор дробного интегрирования $\int d\mathbf{r}^\beta \equiv \partial^{-\beta}/\partial\mathbf{r}^{-\beta}$ будем рассматривать как обратный оператору дифференцирования $\nabla_{\mathbf{r}}^\beta \equiv \partial^\beta/\partial\mathbf{r}^\beta$. Взаимно обратное отношение операторов $\int d\mathbf{r}^\beta$ и $\nabla_{\mathbf{r}}^\beta$ выражается тождеством

$$\nabla_{\mathbf{r}}^\beta \int_{F_r} \varphi(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}^\beta \equiv \varphi(t, \mathbf{r}) \quad (4.7)$$

для любой внутренней области $F_r \subseteq F$ радиусом \mathbf{r} из F и произвольной β -интегрируемой функции $\varphi(t, \mathbf{r})$. Для среднеквадратического смещения частиц $\langle r^2(t) \rangle$ имеем

$$\langle r^2(t) \rangle \equiv \int_F r^2 \psi(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}^\beta. \quad (4.8)$$

В d_s измерениях радиальная часть $\nabla_r^{2\beta}$ оператора Рисса–Вейля $\nabla_r^{2\beta}$ может быть представлена в виде

$$\nabla_r^{2\beta} = \frac{1}{r^{d_s-1}} \frac{\partial^\beta}{\partial r^\beta} \left(r^{d_s-1} \frac{\partial^\beta}{\partial r^\beta} \right), \quad (4.9)$$

при этом радиальная производная $\partial^\beta/\partial r^\beta$ должна быть определена — по смыслу величины $r \geq 0$ — через дробный оператор Римана–Лиувилля

$$\frac{\partial^\beta}{\partial r^\beta} \psi(t, r) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \frac{dr'}{(r-r')^\beta} \psi(t, r'). \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) вполне аналогично (4.2). Уравнения (4.9), (4.10) воспроизводят радиальную часть

$$\Delta_r = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (4.11)$$

стандартного лапласиана $\Delta_r \equiv \partial^2/\partial\mathbf{r}^2$ в пределе $\beta \rightarrow 1$ и $d_s \rightarrow n$. Соотношения (4.1), (4.2) совместно с (4.9), (4.10) представляют дробное кинетическое уравнение для странных процессов переноса на перколирующем фрактальном множестве F в полном интегро-дифференциальном виде. Подчеркнем, что нас в данном случае интересуют *изотропные* процессы на *самоподобных* фрактальных структурах; угловая часть [98] оператора Рисса–Вейля нами обсуждаться не будет. Для изотропных процессов интегрирование по вектору \mathbf{r} в (4.6)–(4.8) сводится к интегрированию по радиальной переменной $r \equiv |\mathbf{r}|$, $r^2 \equiv \mathbf{r}^2$ согласно

$$d\mathbf{r}^\beta \equiv \Omega_{d_s} r^{d_s-1} dr^\beta, \quad (4.12)$$

где телесный угол Ω_{d_s} определен формулой (2.14).

4.5. Среднеквадратическое смещение частиц

Общее решение дробного кинетического уравнения (4.1) при произвольных начальных условиях может быть выражено через *функции Фокса* [100]. Зависимость среднеквадратического смещения частиц $\langle r^2(t) \rangle$ от времени t можно оценить, не прибегая к столь "изошренному" формализму. Умножим сначала обе части дробного кинетического уравнения (4.1) на $r^{2\beta}$, где $1 \leq 2\beta < 2$ учитывает процессы Леви. Затем применим оператор дробного интегрирования $\int d\mathbf{r}^\beta \equiv \partial^{-\beta}/\partial\mathbf{r}^{-\beta}$, удовлетво-

ряющий тождеству (4.7). Интегрирование производится по всему объему перколирующего множества F с учетом представления (4.12); соответственно радиальный масштаб r изменяется в пределах от нуля до бесконечности, $0 \leq r \leq \infty$. В *левой* части уравнения (4.1) вынесем дифференцирование по времени из-под знака интеграла и заменим частную производную $\partial^x/\partial t^x$ на полную дробную производную d^x/dt^x . Оставшийся дробный интеграл по r есть среднее по ансамблю $\langle r^{2\beta}(t) \rangle$. При больших $t \rightarrow \infty$ имеем $\langle r^{2\beta}(t) \rangle \sim \langle r^2(t) \rangle^\beta$, где $\langle r^2(t) \rangle$ определено выражением (4.8). В *правой* части уравнения (4.1) дробное интегрирование два раза по частям с учетом условия нормировки (4.6) дает постоянную AB , где

$$A = \frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(1+\beta)} \frac{\Gamma(d_s+\beta)}{\Gamma(d_s)}. \quad (4.13)$$

Следовательно,

$$\frac{d^x}{dt^x} \langle r^2(t) \rangle^\beta = AB. \quad (4.14)$$

Из дифференциального уравнения (4.14) находим

$$\langle r^2(t) \rangle = \left[\frac{AB}{\Gamma(1+\alpha)} \right]^{1/\beta} \times t^\mu \quad (t \rightarrow \infty), \quad (4.15)$$

где

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.16)$$

Сходимость среднеквадратического смещения (4.8), (4.15) обеспечивается за счет дробного условия нормировки (4.6), содержащего оператор нелокального интегрирования $\int d\mathbf{r}^\beta \equiv \partial^{-\beta}/\partial\mathbf{r}^{-\beta}$. Полагая в (4.15)

$$\frac{AB}{\Gamma(1+\alpha)} \equiv (2D)^\beta, \quad (4.17)$$

возвращаемся к зависимости (3.5) для странных процессов переноса вблизи НСС. Выражение (4.17) связывает параметры D и B при произвольных индексах дифференцирования $0 \leq \alpha \leq 2$ и $1 \leq 2\beta < 2$. В *гауссовом пределе* $\alpha \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 1$, $d_s \rightarrow n$ из (4.17) легко получить $B \rightarrow D/n$ в согласии с (3.14).

Из выражения (4.16) следует, что значение показателя μ для странных процессов переноса определяется *конкуренцией* между СБФВ (α) и процессами Леви (β). Соответственно из (3.6) вытекает "соотношение пропорциональности" для кинетического уравнения (4.1):

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{d_s}{d_f} \equiv \frac{2}{2+\theta}. \quad (4.18)$$

В критическом режиме ($d_s = C$) с учетом (2.10) имеем

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{C}{d_f}. \quad (4.19)$$

Вспоминая выражение (3.8), приходим к соотношению пропорциональности, записанному для показателя H :

$$H = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{C}{2d_f}. \quad (4.20)$$

Уравнения (4.19), (4.20) связывают индексы (α , β) в дробном кинетическом уравнении (4.1) с хаусдорфовой размерностью d_f фрактального множества F на пороге протекания. При $\alpha = \beta$ приходим к диффузионному процессу: $H = 1/2$. Если $\alpha = \beta \neq 1$, то диффузия является странной в широком смысле (см. раздел 3). Гауссовой (не странной) диффузии отвечает $\alpha = \beta = 1$; все производные в кинетическом уравнении (4.1) являются в этом случае целыми. Подчеркнем, что условие $\alpha = \beta$ само по себе гарантирует лишь линейный рост среднеквадратического смещения частиц во времени, но никак не гауссов характер процесса переноса [84]. Для перехода к гауссову пределу требуется выполнение более сильных условий $d_f \rightarrow d_s \rightarrow n$.

"Противостояние" случайных блужданий во фрактальном времени (α) и полетов Леви (β) приводит — на микроскопическом уровне — к чрезвычайно сложной пространственно-временной структуре движения отдельных частиц, спорадически предпочитающих один процесс другому. При $\alpha < 1$ частицы то подолгу "топчутся на месте" (СБФВ), то демонстрируют всплески "активности", быстро просачиваясь через область турбулентности (Леви). Данный тип движения называют *переменяемым* — его возникновению способствуют хаотические переходы между конкурирующими режимами. В качестве иллюстрации на рис. 6 показана траектория заряженной частицы вблизи сепаратрисы фрактальной броуновской поверхности, симулирующей многомасштабное возмущение постоянного однородного магнитного поля, направленного по нормали к плоскости xy [64]. Обратим внимание читателя на нерегулярный характер динамического процесса, балансирующего между периодами продолжительного "застоя" (клубки "спутанных" траекторий) и быстрыми "проходами" частиц поперек поля (расплетенные "нити").

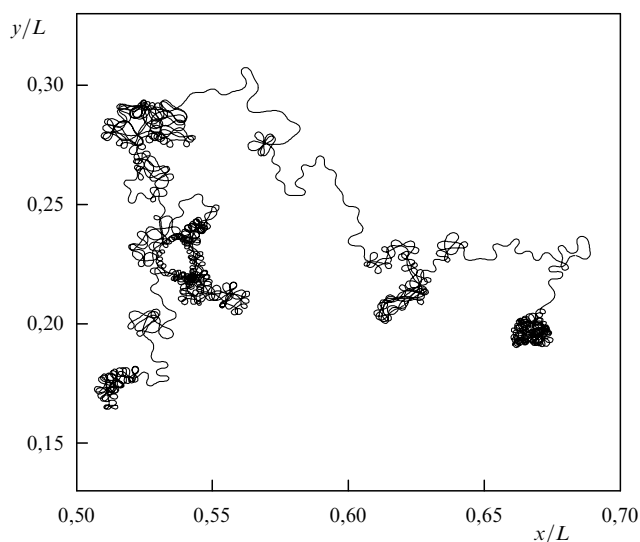


Рис. 6. Траектория заряженной частицы (иона) вблизи сепаратрисы фрактальной броуновской поверхности, симулирующей многомасштабное возмущение постоянного однородного магнитного поля. Траектория получена путем численного интегрирования микроскопических уравнений движения методом Рунге–Кутты пятого порядка. Определяющим фактором, влияющим на поведение частицы, является сбой фазы ларморовского вращения под действием наложенного возмущения. (Рисунок любезно предоставлен Г. Зимбардо, Университет Калабрии, Италия.)

5. Феномен самоорганизованной критичности

Связующим звеном между топологией и кинетикой выступает представление о неравновесном (квази)стационарном состоянии турбулентной системы, переход к которому осуществляется — при необходимом условии обмена энтропией и энергией с внешней средой — за счет многомасштабных корреляций в пространстве и во времени. Пространственные корреляции обнаруживают себя в примечательных структурных характеристиках НСС, топология которого суть перколирующее (бесконечное линейно связное) фрактальное множество, лежащее "на пороге протекания" (т.е. в критической точке, ниже которой кинетические процессы в среде ограничены конечной областью фазового пространства). "Предпочтения", отдаваемые критическим режимам, обусловлены их относительной термодинамической выгодностью — свободная энергия турбулентного ансамбля понижается при формировании пороговых распределений, отвечающих перколяционному переходу в системе. С существованием порога связана введенная в разделе 2 универсальная константа — *постоянная протекания* $C \approx 1,327\dots$, — определяющая (по своему физическому смыслу) минимальное дробное число степеней свободы, необходимое частице для прохождения области турбулентности в процессе случайных рассеяний на сгустках поля.

В отличие от пространственных, временные корреляции стремятся не столько стабилизировать турбулентный ансамбль вблизи НСС, сколько "оживить" фрактальную геометрию системы, давая ей возможность "шевелиться", оставаясь в перколяционных "оковах". Ни в чем не уступая своим пространственным собратьям, получившим "в наследство" от теоремы об универсальном значении постоянной протекания $C \approx 1,327\dots$, в богатом королевстве сильной турбулентности корреляции во времени захватывают собственные "феоды" универсальности. Одним из таких феонов является стремление к *самоорганизованной критичности* (СОК) — сингулярному неравновесному (квази)стационарному состоянию [112, 113], для достижения которого необходимо, чтобы все внешние (вынуждающие) воздействия на систему были как можно более медленными [114, 115]. При медленном вынуждении система получает определенную "свободу организации", при этом стремление к СОК становится универсальным явлением, не зависящим от специфики системы. Концепция самоорганизованной критичности определяет предпочтительное состояние динамической системы вдали от теплового равновесия, обладающее рядом "преимуществ" по сравнению с "несингулярными" НСС. Важнейшие физические примеры обсуждаются в монографиях [28, 116, 117]. Отметим также оригинальные работы [84, 118–124].

Универсальный характер СОК удается понять в контексте фундаментальных физических принципов (таких, как принцип наименьшего действия), регулирующих поведение динамических систем в наиболее общем виде [70]. В самом деле, "предпочтения", отдаваемые тому или иному НСС, уместно выразить через некоторый функционал, имеющей смысл *действия* для НСС как целого. В качестве соответствующей "обобщенной координаты" удобно выбрать параметр, "распознающий" различные НСС по характерным статистическим признакам. Задача заключается в том, чтобы получить СОК

из минимальности действия в "пространстве неравновесных стационарных состояний". Данный подход можно рассматривать как реализацию принципа наименьшего действия в применении к НСС. Из всего многообразия НСС при бесконечно медленном внешнем вынуждении самосогласованная динамическая система выбирает то, действие для которого минимально. Перейдем к количественной стороне проблемы.

5.1. Ограничение на число Кубо

Будем считать, что геометрия НСС представляет собой фрактал F , вложенный в евклидово пространство E^n размерностью $n \geq 2$. Фрактальное множество F можно "увидеть", сделав фотографию НСС с малым временем экспозиции $t = \tau$. С увеличением τ фотографии будут все более и более размытыми из-за внутренней динамики НСС. Стороннему наблюдателю будет казаться, что множество F медленно "шевелится", т.е. меняет свое положение в пространстве E^n в результате непрерывного "самоперетекания" (рис. 7); при этом хаусдорфова размерность $d_f = d_f[F]$ и индекс связности $\theta = \theta[F]$ сохраняются во времени. В общем случае "самоперетекание" можно рассматривать как набор (нелинейных) длинноволновых возбуждений на F ; в отсутствие возбуждений множество F "замирает" (перестает "шевелиться").

Предположим, что снимок НСС окажется полностью размытым при временах экспозиции τ , превышающих некоторое характерное время τ_* :

$$\tau \gtrsim \tau_* \quad (5.1)$$

Существование конечного времени τ_* является важнейшим (и единственным) предположением относительно внутренней динамики НСС, сделанным в настоящем обзоре. Данное предположение позволяет сказать, что за (большое) время (5.1) "щупальца" фрактального множества F затронут все или почти все точки объемлющего пространства E^n . Иначе говоря, в E^n нет запрещенных областей, "не участвующих в жизни" НСС (см. рис. 7). По порядку величины

$$\tau_* \sim \frac{\xi}{V}, \quad (5.2)$$

где ξ соответствует минимальной длине волны возбуждений, а параметр V определяет групповую скорость

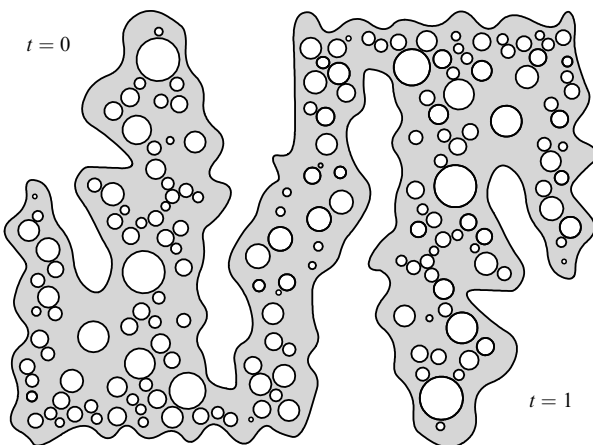


Рис. 7. "Самоперетекание" фрактального множества за счет внутренних нелинейных динамических степеней свободы.

"самоперетекания". Необходимо, чтобы групповая скорость V была мала по сравнению со скоростями частиц, просачивающихся через турбулентную область,

$$V \ll w. \quad (5.3)$$

Условие (5.3) означает, что (странные) процессы переноса вблизи НСС успевают "подстраиваться" под внутреннюю динамику фрактального множества F : согласование процессов переноса с фрактальной геометрией НСС обеспечивает сохранение параметров $d_f[F]$ и $\theta[F]$ во времени. Из условий (5.2), (5.3) находим

$$Q_* \equiv \frac{w\tau_*}{\xi} \gg 1. \quad (5.4)$$

Параметр Q_* обычно называют *числом Кубо*. Выражения (5.1) и (5.4) удобно выразить через характерные частоты $f \sim 1/t$. Имеем:

$$f \lesssim f_* \sim \frac{V}{\xi}, \quad (5.5)$$

$$Q_* \equiv \frac{w}{\xi f_*} \gg 1. \quad (5.6)$$

Соотношения (5.1), (5.5) и (5.4), (5.6) показывают, что внутренняя динамика НСС является *медленным* процессом по сравнению с блужданием частиц по множеству F , отвечающим за перенос массы и заряда в турбулентной области. Критерием медленности является значение числа Кубо, которое должно быть большим, $Q_* \gg 1$. Важно подчеркнуть, что интервал (5.5) записан в системе отсчета НСС. В случае, если турбулентный ансамбль движется относительно наблюдателя со скоростью u , в (5.5) необходимо учесть поправку, обусловленную эффектом Доплера:

$$f \lesssim f_* \sim \frac{|V - u|}{\xi}. \quad (5.7)$$

Мы вернемся к выражению (5.7) при рассмотрении спектров флуктуаций в солнечном ветре и хвосте магнитосферы Земли.

5.2. Статистика динамических флуктуаций

При условиях (5.1), (5.5) и (5.4), (5.6) внутренняя динамика НСС может быть записана в виде самоаффинного временного ряда $\mathcal{I}_S(t)$, $t \gtrsim \tau_*$, хаусдорфова размерность

$$\delta_f \equiv d_f[\mathcal{I}_S] = 1 + S \quad (1 \leq \delta_f \leq 2) \quad (5.8)$$

которого не зависит от точки в пространстве E^n . Наблюдатель, находящийся в системе отсчета НСС, интерпретирует ряд $\mathcal{I}_S(t)$ как *динамические флуктуации* в турбулентной среде, обусловленные внутренней изменчивостью НСС. Выражение (5.8) следует из (2.2). Значение хаусдорфовой размерности δ_f определяет *топологическую энтропию* \mathcal{E}_f кривой $\mathcal{I}_S(t)$ согласно [27]:

$$\mathcal{E}_f[\mathcal{I}_S] = 1 - \frac{1}{\delta_f}. \quad (5.9)$$

Топологическая энтропия $0 \leq \mathcal{E}_f \leq 1/2$ характеризует степень "изломанности" ряда $\mathcal{I}_S(t)$. Для гладких кривых ($S = 0$, $\delta_f = 1$) энтропия $\mathcal{E}_f[\mathcal{I}_0] = 0$.

Для самоаффинных временных рядов $\mathcal{I}_S(t)$ дисперсия приращений в любой момент времени t имеет вид [9]

$$\langle |\mathcal{I}_S(t + \Delta t) - \mathcal{I}_S(t)|^2 \rangle = A_J \times |\Delta t|^{2J}, \quad (5.10)$$

где A_J — нормировочная постоянная, операция усреднения $\langle \dots \rangle$ определена согласно

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{t} \int_0^t [\dots] dt, \quad (5.11)$$

а параметр J связан с S и δ_f цепочкой равенств

$$J = 1 - S = 2 - \delta_f \quad (0 \leq J \leq 1). \quad (5.12)$$

При $J = S = 1/2$ дисперсия (5.10) соответствует случайным флуктуациям в системе

$$\langle |\mathcal{I}_{1/2}(t + \Delta t) - \mathcal{I}_{1/2}(t)|^2 \rangle = A_{1/2} \times |\Delta t|, \quad (5.13)$$

вероятности которых распределены по Гауссу. Заметим, что гауссовость следует из (5.13), поскольку на больших временах $t \gtrsim \tau_*$ флуктуации заполняют все объемлющее евклидово пространство E^n . (Ситуация вполне аналогична процессу (3.12) в E^n .) Хаусдорфова размерность δ_f для гауссовых временных рядов $\mathcal{I}_{1/2}(t)$ равна $\delta_f = 2 - 1/2 = 3/2$ [36].

Напротив, при $J = 1 - S \neq 1/2$ статистика динамических флуктуаций существенно не гауссова: "всплески" и "падения" кривой $\mathcal{I}_S(t)$ происходят не случайно, как в гауссовом пределе (5.13), а в соответствии с определенными тенденциями [9], заложенными в значении параметра $J = 1 - S$. Действительно, рассмотрим коррелятор $\mathcal{O}_J(t)$ прошлых и будущих приращений самоаффинного временного ряда $\mathcal{I}_S(t)$ [9]:

$$\mathcal{O}_J(t) = - \frac{\langle \mathcal{I}_S(-t) \mathcal{I}_S(t) \rangle}{\langle \mathcal{I}_S^2(t) \rangle}. \quad (5.14)$$

Полагая $\mathcal{I}_S(0) = 0$, из (5.14) получим

$$\mathcal{O}_J(t) = 2^{2J-1} - 1 = \text{const}(t). \quad (5.15)$$

С коррелятором вида (5.15) мы уже встречались при описании СБФВ. Параметр $2J$ в (5.15) аналогичен фрактальной размерности активного времени α в выражении (4.4). Как видно из (5.15), величина $0 \leq J \leq 1$ определяет статистику флуктуаций, связанных с внутренней "жизнью" НСС. Для гауссовых флуктуаций ($J = 1/2$) коррелятор $\mathcal{O}_J(t) \equiv 0$ при всех $t \gtrsim \tau_*$ — всплески и падения временного ряда $\mathcal{I}_S(t)$ абсолютно случайны. При $0 \leq J < 1/2$ коррелятор $\mathcal{O}_J(t) < 0$ — всплеск функции $\mathcal{I}_S(t)$ в прошлом означает скорое падение в будущем. Наоборот, при $1/2 < J \leq 1$ коррелятор $\mathcal{O}_J(t) > 0$ — всплеск в прошлом означает возрастание $\mathcal{I}_S(t)$ в будущем. Заметим, что коррелятор $\mathcal{O}_J(t)$ принимает постоянное (не зависящее от времени) значение (5.15) при всех $t \gtrsim \tau_*$. Данное обстоятельство позволяет говорить о сохранении тенденций в поведении ряда $\mathcal{I}_S(t)$, или о свойстве персистентности [9]. При $1/2 < J \leq 1$ говорят о персистентных временных рядах $\mathcal{I}_S(t)$, а при $0 \leq J < 1/2$ — об антиперсистентных рядах.

5.3. Спектры самоаффинных рядов

Рассмотрим преобразование Фурье

$$P[\mathcal{I}_S](f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{I}_S(t)|^2 \exp(ift) dt \quad (5.16)$$

статистически самоаффинного временного ряда $\mathcal{I}_S(t)$. Поскольку ряд $\mathcal{I}_S(t)$ подобен $\mathcal{I}_S(ft)$ с коэффициентом f^{S-1} , спектр мощности $P[\mathcal{I}_S](f)$ в (5.16) зависит от частоты f по степенному закону

$$P[\mathcal{I}_S](f) \sim f^{-\varpi} \quad (5.17)$$

с показателем

$$\varpi = 3 - 2S = 2J + 1. \quad (5.18)$$

Частота f в (5.17) удовлетворяет условию (5.5). Ввиду $0 \leq J \leq 1$ значение ϖ изменяется в пределах

$$1 \leq \varpi \leq 3. \quad (5.19)$$

В частности, для гауссовых временных рядов $\mathcal{I}_{1/2}(t)$ показатель степенного спектра ϖ равен 2. Отметим, что спектр $P[\mathcal{I}_{1/2}] \sim f^{-2}$ (отражающий гауссово броуновское движение частиц в E^n) иногда называют коричневым шумом [28]. Комбинируя (5.12) и (5.18), приходим к формуле Берри [125]

$$\varpi = 5 - 2\delta_f. \quad (5.20)$$

Выражения (5.18) и (5.20) нашли непосредственное применение при исследовании фрактальных временных рядов $\mathcal{I}_S(t)$, описывающих динамические флуктуации в солнечном ветре [54, 68, 69], хвосте магнитосферы Земли [47, 51, 126], а также в активных областях фотосферы Солнца [117]. Общие статистические методы, относящиеся к фрактальному анализу сигналов, изложены в монографиях [9, 127].

5.4. Действие для динамических флуктуаций

Определим теперь действие для динамических флуктуаций (5.10), (5.11) согласно

$$\mathcal{A}_J = - \frac{1}{4\pi} \int_0^t dr \int_0^t \langle \mathcal{I}_S(-t) \mathcal{I}_S(t) \rangle dt, \quad (5.21)$$

где $t \gtrsim \tau_*$. Дисперсия $\langle \mathcal{I}_S^2(t) \rangle / 8\pi$, характеризующая поведение подынтегрального выражения — "плотности лагранжиана" — посредством коррелятора (5.14), представляет собой плотность энергии флуктуаций в E^n . Параметр $J = 1 - S$ имеет смысл обобщенной координаты, фиксирующей положение системы в функциональном пространстве неравновесных (квази)стационарных состояний. Элементами такого пространства являются всевозможные НСС, различающиеся индексом J , $0 \leq J \leq 1$. Заметим, что в действии (5.21) опущены члены с обобщенными импульсами $\delta J / \delta t$. Указанное обстоятельство связано с предположением о медленности внешних вынуждающих воздействий, регулирующих положение турбулентного ансамбля в интервале $0 \leq J \leq 1$. Заметим также, что подынтегральное выражение в (5.21) инвариантно относительно обращения времени $t \rightarrow -t$. Симметрия $t \rightarrow -t$ обусловлена отсутствием крупномасштабных эволюционных явлений в

системе вблизи НСС. Из соотношений (5.10), (5.11), (5.15) и (5.21) находим

$$A_J = \frac{1}{4\pi} \int dr \left(\frac{2^{2J-1} - 1}{2J+1} \right) A_J \times t^{2J+1}. \quad (5.22)$$

Действие (5.22) растет с t как t^{2J+1} . Для любого наперед заданного $t \gg \tau_*$ действие (5.22) минимально в пределе

$$J \rightarrow 0. \quad (5.23)$$

При условии (5.23) дисперсия (5.10) не зависит от интервала времени Δt . Значение параметра S , вытекающее из (5.23), составляет

$$S \rightarrow 1. \quad (5.24)$$

Соответственно хаусдорфова размерность δ_f временного ряда $\mathcal{I}_S(t)$ стремится к своему максимальному значению, равному

$$\delta_f = 1 + S \rightarrow 2. \quad (5.25)$$

Топологическая энтропия $\Xi_f[\mathcal{I}_S]$ максимальна в пределе (5.25):

$$\Xi_f[\mathcal{I}_S] \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (5.26)$$

При условии (5.26) временной ряд $\mathcal{I}_S(t)$ обнаруживает наиболее полную "коллекцию" изломов, какую только может иметь непрерывная (!) самоаффинная кривая на плоскости. Согласно (5.17) и (5.18) спектр Фурье такой кривой имеет вид

$$P[\mathcal{I}_S](f) \sim f^{-1}, \quad (5.27)$$

отвечающий ограничению снизу

$$\varpi \rightarrow 1 \quad (5.28)$$

на показатель $1 \leq \varpi \leq 3$. Спектр (5.27) обычно называют розовым шумом, или фликкер-шумом [28]. Вездесущность розового шума [28] вдохновила Бака, Танга и Вайзенфельда [112, 113] на введение концепции самоорганизованной критичности (СОК), объясняющей стремление сложных динамических систем [116] к предельному режиму (5.27) в области низких частот. Переход (5.23) приводит к глубокому пониманию СОК как неравновесного (квази)стационарного состояния, подчиняющегося принципу наименьшего действия в формулировке (5.21), (5.22). Тем самым установлено соответствие понятия СОК фундаментальным физическим принципам, лежащим в основе современной теории динамических систем. Ограничения по частоте следуют из условий (5.5) и (5.6).

5.5. Модель песчаной горки

Классические модели СОК [116] основаны на представлении о песчаной горке, конус которой (при насыпании песка) формируется в результате сброса избыточной массы в лавины. В силу вращательной симметрии процесс выглядит одинаково в любом вертикальном сечении горки, проходящем через ее вершину. Живя в двумерном мире и насыпая горки из двумерного песка, мы владели бы всей полезной информацией о кинетике СОК. Траектории лавин в таком мире выглядят как

одномерные структуры, покрывающие горку с внешней стороны. Модель песчаной горки можно рассматривать как альтернативу динамической модели, построенной на статистике самоаффинных временных рядов $\mathcal{I}_S(t)$. Аналогом лавин являются в данном случае одномерные длинноволновые возбуждения, модулирующие фрактальное распределение F на больших масштабах; в качестве примера приведем длинноволновые разрывные (тиринг) моды в турбулентных токовых слоях [49].

Важный момент заключается в том, что статистика динамических флуктуаций $\mathcal{I}_S(t)$ непосредственно отражает организацию системы в конфигурационном пространстве; в частности, фрактальная размерность δ_f , определяющая спектр Фурье ряда $\mathcal{I}_S(t)$, связана с хаусдорфовой размерностью d_f , характеризующей мощность турбулентных структур в E^n . Значение d_f может, вообще говоря, зависеть от масштаба длины в E^n . На масштабах, меньших длины волны возбуждений в системе, хаусдорфова размерность d_f определяется спецификой взаимодействий, участвующих в формировании НСС. С увеличением масштаба эффекты модуляции (т.е. сброса энергии в лавины) приводят к тому, что d_f "забывает" специфические свойства турбулентного ансамбля, принимая при этом универсальное предельное значение [49]

$$d_f \rightarrow 1. \quad (5.29)$$

Переход (5.29) следует рассматривать как пространственный вариант условия (5.25). Выражения (5.25) и (5.29) устанавливают соответствие между моделью песчаной горки ($d_f \rightarrow 1$) и динамической моделью СОК ($\delta_f \rightarrow 2$). Более того, можно указать некоторое общее соотношение между параметрами d_f и δ_f , выходящее за рамки классической модели СОК [47]. Предположим, что в результате некоторого динамического процесса фрактальное множество F отображается на самоаффинный временной ряд $\mathcal{I}_S(t)$. Примером может служить стационарная конвекция (параллельный перенос) фрактального распределения мимо неподвижного наблюдателя, воспринимającego движение F как вариации поля во времени [128]. В двумерном мире ($n=2$) соотношение между d_f и δ_f имеет вид [129]

$$\delta_f + d_f = 3. \quad (5.30)$$

Обобщение (5.30) на случай произвольного числа измерений $n \geq 2$ [130] может быть получено по индукции с учетом геометрии системы в ее сечениях плоскостью E^2 . Полагая $d_f \rightarrow 1$ в (5.30), возвращаемся к условию (5.25). Формула (5.30) выражает взаимозависимость динамических (δ_f) и структурных (d_f) свойств турбулентного ансамбля с фрактальной пространственно-временной организацией. Комбинируя (5.20) и (5.30), легко получить [47, 49]

$$\varpi = 2d_f - 1. \quad (5.31)$$

В пределе $d_f \rightarrow 1$ выражение (5.31) воспроизводит розовый шум (5.27).

5.6. Супердиффузия вблизи СОК

Объединяя соотношение пропорциональности (4.20) с условием (5.29), получим верхнюю границу $H = H_{\max} = C/2 \sim 2/3$ показателя H , характеризующего странные процессы переноса в турбулентных средах.

Значение $H = H_{\max}$ совпадает с (3.19) и соответствует максимально интенсивной *супердиффузии* в системе. Таким образом, супердиффузионные процессы достигают своего "апогея" в режиме СОК. Равенство $H = H_{\max}$ предполагает доминирующую роль персистентных СБФВ и процессов Леви в турбулентной области [84]. Значение $H = C/2 \sim 2/3$ хорошо согласуется с экспериментальным результатом $H \sim 0,6 - 0,75$ [63, 73, 74] для турбулентных электрических токов, развивающихся в токамаках по мере приближения неравновесной магнитоплазменной системы к СОК. Замечательно, что режиму $H \sim 0,6 - 0,75$ всякий раз сопутствует *розовый шум* $P(f) \sim f^{-1}$ в турбулентной области [73, 74]. Полученные результаты указывают на существование глубокой связи между кинетикой турбулентного переноса и цветом шума в динамической системе [84].

6. Спектры флуктуаций в хвосте магнитосферы

Проиллюстрируем спектральные свойства динамических систем вблизи НСС на примере турбулентных токовых слоев в хвосте магнитосферы Земли (рис. 8, правее X-линии). Хвост магнитосферы — уникальная естественная лаборатория, в которой самой Природой поставлен отлаженный за миллиарды лет эксперимент по саморегуляции полей и токов, образующих, под беспощадным напором солнечного ветра, хрупкий динамичный организм, живущий по своим собственным законам, но вынужденный всякий раз подстраиваться под без конца изменяющиеся внешние условия, диктуемые флуктуациями межпланетной среды. Задача о турбулентном токовом слое тесно связана с объяснением структурной устойчивости хвоста магнитосферы в областях с пренебрежимо малой регулярной составляющей магнитного поля, направленной по нормали к нейтральной плоскости [50]. В формальной записи [51]

$$B_n \lesssim 10^{-2} B_0, \tag{6.1}$$

где B_n — нормальная компонента поля, а B_0 обозначает характерное магнитное поле в северной и южной долях, образующих протяженный магнитный шлейф из анти-

параллельных силовых линий, ограничивающих токовую систему хвоста при ее взаимодействии с межпланетной плазмой. Условие (6.1) выполняется в дальнем хвосте магнитосферы ($R \gtrsim (50 - 100)R_3$), а также в областях развития магнитосферной суббури ($R \sim (10 - 20)R_3$) на стадии, когда происходит локальное утоньшение и вытягивание магнитной конфигурации токового слоя. (Геоцентрическое расстояние R измеряется в единицах радиуса Земли: $R_3 \sim 6,4 \times 10^3$ км.) Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь здесь не идет о хорошо известных ламинарных режимах, относящихся к областям хвоста, напоминающим "сплюснутый" диполь (на рис. 8 — левее X-линии). В ламинарном случае ток поперек хвоста, поддерживающий его доли, возникает за счет неадиабатичности ионов на спайсеровских орбитах [131]. Работа крупномасштабного электрического поля, передаваемого внутрь магнитосферы при ее обтекании солнечным ветром, над током поперек хвоста положительна и идет на частичный разогрев "холодной" межпланетной плазмы, проникающей различными путями в токовый слой и снабжающей его заряженными частицами. При уменьшении нормального поля B_n ниже некоторого критического порога (порядка $10^{-2} B_0$) ламинарная конфигурация хвоста теряет устойчивость в результате возникновения многомасштабных турбулентных течений. Переход к турбулентности обусловлен развитием ряда нестабильностей, например, потоковых [132, 133]. Сильная многопотоковая турбулентность представляет собой иерархическую сеть из токовых струй, хаотически разбросанных по нейтральной плоскости хвоста (рис. 9). Изгибание и ветвление струй приводит к образованию сложных мозаик из сгустков турбулентного магнитного поля, "попавшего" в токовые сети [47, 50]. Иерархии токов и полей вблизи основного НСС турбулентной системы образуют электродинамически согласованные фрактальные конфигурации. При кинетическом описании сгустки турбулентного магнитного поля можно рассматривать как рассеивающие центры, препятствующие быстрому прохождению заряженных частиц через токовый слой под действием магнитосферного электрического поля. Рассеяние частиц на сгустках ограничивает амплитуду электрического тока поперек хвоста; тем самым достигается турбулентное устойчивое состояние, обеспечивающее стабилизацию электродинамического ансамбля вблизи НСС [50]. Важно подчеркнуть, что сгустки турбулентного поля образуются за счет тех самых частиц, которые испыты-

Неравновесные квазистационарные состояния токовых слоев

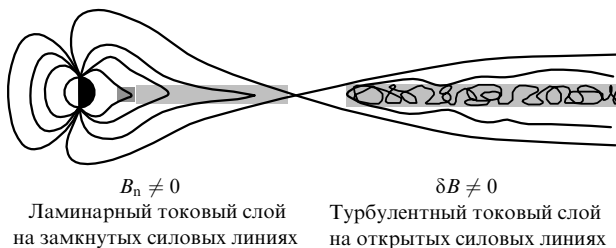


Рис. 8. Токовые слои в хвосте магнитосферы. Ламинарным режимам отвечают области ближнего хвоста с ненулевой нормальной составляющей поля, обеспечивающей необходимую магнитную вязкость среды. Ламинарный токовый слой можно рассматривать как гладкую деформацию дипольного поля Земли. Переход к турбулентности связан со значительным локальным утоньшением и вытягиванием магнитной конфигурации диполя, теряющей устойчивость при малой вязкости. Примерами являются дальний хвост магнитосферы на открытых силовых линиях, а также области ближнего хвоста перед началом суббури.

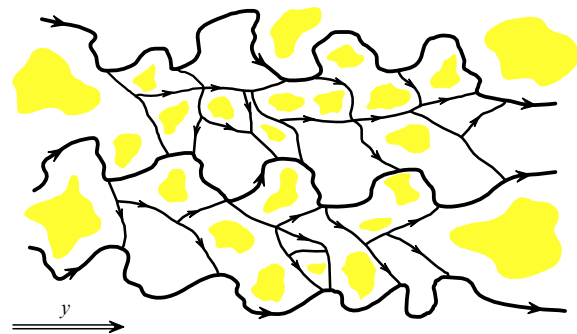


Рис. 9. Структура турбулентного токового слоя вблизи НСС. Сгусткам магнитного поля отвечают островки с нерегулярной формой, обтекаемые линиями тока.

вают рассеяние на магнитных неоднородностях. Флуктуации тока, обусловленные процессом рассеяния, являются источниками турбулентного поля, рассеивающего частицы [49].

6.1. Розовый шум в хвосте магнитосферы

Вернемся прежде всего к выражению (5.7) для интервала частот f , на которых существенны эффекты внутренней динамики турбулентного ансамбля. Доплеровский сдвиг обусловлен в данном случае конвекцией плазмы вдоль хвоста со скоростью солнечного ветра, замедленного на бесстолкновительной отошедшей ударной волне со стороны дневной магнитопаузы. В дальнем хвосте магнитосферы (на геоцентрических расстояниях R порядка $100R_3$ и более) конвективный перенос отвечает скоростям $u \sim 200$ км с⁻¹ [134]. В областях ближнего хвоста ($R \sim (10 - 20)R_3$) на подготовительных стадиях развития суббури конвекция протекает заметно медленнее: $u \sim 50$ км с⁻¹ [135]. Для типичных параметров турбулентного токового слоя собственная скорость сгустков V оказывается существенно меньше u [130]. Соответственно условие (5.7) принимает вид [47]

$$f \lesssim f_* \sim \frac{u}{\xi}. \quad (6.2)$$

Для оценки корреляционной длины ξ учтем, что магнитоплазменные структуры в хвосте магнитосферы Земли модулируются периодическими длинноволновыми возмущениями, отвечающими разрывной (тиринг) неустойчивости токового слоя [136]. Минимальная длина волны разрывных мод — порядка $\lambda_* \sim 2\pi L$ [137], где L — характерная толщина слоя. Следовательно,

$$\xi \sim \lambda_* \sim 2\pi L. \quad (6.3)$$

Величина L для дальнего хвоста составляет $L \sim 4 \times 10^3$ км [138], откуда корреляционная длина $\xi \sim 2,5 \times 10^4$ км. Реалистичным значением L для тонкого вытянутого хвоста в областях развития магнитосферной суббури является $L \sim 1 \times 10^3$ км [135], при этом корреляционная длина $\xi \sim 6,5 \times 10^3$ км. Из условия (6.2) в обоих случаях находим

$$f \lesssim f_* \sim 1 \times 10^{-2} \text{ Гц}. \quad (6.4)$$

Интервалу частот (6.2), (6.4) отвечает розовый шум (5.27), обусловленный сбросом энергии в разрывные моды. Низкочастотные шумы, близкие по свойствам к розовому шуму $P(f) \sim f^{-1}$, действительно обнаружены в хвосте магнитосферы (как дальнем, так и ближнем) при $f \lesssim 1 \times 10^{-2}$ Гц в ходе независимых магнитоплазменных экспериментов [126, 138–140]. Подробное обсуждение полученных результатов можно найти в [47, 51, 130].

6.2. Степенные спектры на промежуточных частотах

Роль конвекции далеко не ограничивается доплеровской поправкой (5.7) к частоте f_* ; важные события разворачиваются на промежуточных частотах

$$f_* \lesssim f \lesssim f_{**}, \quad (6.5)$$

$$f_* \sim \frac{|V-u|}{\xi}, \quad f_{**} \sim \frac{|V \pm u|}{a}, \quad (6.6)$$

где $a \ll \xi$ характеризует минимальный линейный размер сгустков турбулентного магнитного поля. Самосогласованная оценка величины a будет получена в разделе 7. Интервал частот (6.5), (6.6) описывает вариации поля вследствие движения (как целого) фрактальной структуры относительно неподвижного наблюдателя; при этом неоднородности, отвечающие волновому вектору $1/\xi \lesssim k \lesssim 1/a$, соответствуют вариациям поля на частоте $f \sim ku$. Согласно (5.1), фотография поля со временем экспозиции $\tau \ll \tau_* \sim 1/f_*$ разрешает пространственную фрактальную структуру ансамбля в интервале масштабов $[\sim a, \sim \xi]$. Обозначим, как и выше, хаусдорфову размерность турбулентного множества через d_f . В системе отсчета неподвижного наблюдателя стационарная конвекция фрактального распределения выглядит как вариации поля во времени, статистика которых ложится на самоаффинный временной ряд $\mathcal{I}_S(t)$. При этом хаусдорфова размерность d_f ряда $\mathcal{I}_S(t)$ связана с параметром d_f соотношением (5.30).

6.3. Темно-коричневый шум в хвосте магнитосферы

Если бы весь разношерстный "зоопарк" магнитоплазменных неустойчивостей, развивающихся в хвосте магнитосферы по мере приближения системы к НСС, не подчинялся жесткому регламенту коллективного поведения (см. рис. 1), то тонкая структура турбулентного токового слоя превратилась бы в беспорядочное нагромождение магнитных флуктуаций, напоминающее *случайный броуновский ландшафт* [9], — геометрическое воплощение непредсказуемости. Сечение броуновского ландшафта нейтральной плоскостью токового слоя представляло бы собой фрактальное распределение с хаусдорфовой размерностью $d_f = 3 - \delta_f = 2 - S = 3/2$, где $S = 1/2$ — показатель подобия для случайного процесса (см. (5.12) и (5.30)). Конвекция такого распределения вдоль долей хвоста приводила бы к *коричневому шуму* [28]

$$P(f) \sim f^{-2}, \quad (6.7)$$

где частота $f_* \lesssim f \lesssim f_{**}$, а показатель степенного спектра $\varpi = 2d_f - 1 = 3 - 2S = 2$ в соответствии с (5.18) и (5.31).

За счет многомасштабных корреляций, "синхронизирующих" — вблизи основного НСС — различные парциальные неустойчивости в единую универсальную "моду" (см. рис. 1), наблюдаемое значение параметра ϖ может отличаться от 2. (Говоря о спектрах турбулентности, мы всюду подразумеваем флуктуации *магнитного поля*. Спектральные свойства *поля скоростей* могут иметь несколько иные характеристики [47, 143].) В разделе 7 мы рассмотрим самосогласованную фрактальную модель турбулентного токового слоя, учитывающую дальнедействующие корреляционные эффекты. Согласно модели, значение показателя ϖ на промежуточных частотах $f_* \lesssim f \lesssim f_{**}$ близко к $7/3$, что вносит дополнительные мрачноватые оттенки в коричневый шум (6.7). Впрочем, мрачные тона вполне соответствуют реальности: по данным различных космических экспериментов [126, 138–142], включая исследования магнитосферы Земли по программе Interball (А. Петрукович, частное сообщение), значение ϖ на частотах f , начиная с $f_* \sim 1 \times 10^{-2}$ Гц и вплоть до десятых долей герца, заключено в интервале от 2 до 2,5. Регистрируемые спектры мощности в турбулентных токовых слоях,

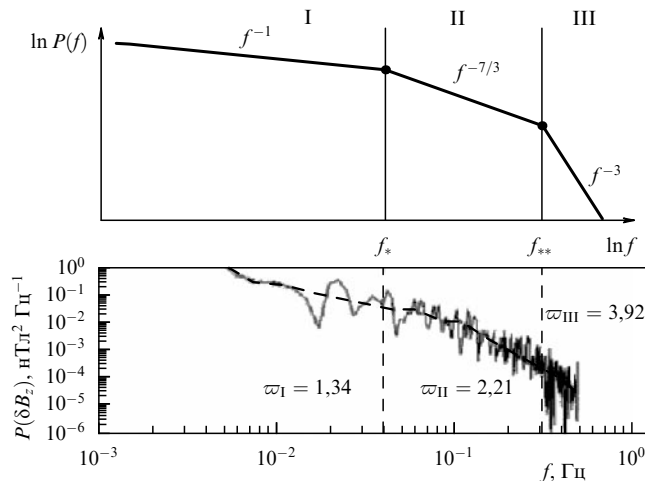


Рис. 10. Цветные шумы в хвосте магнитосферы Земли. I — низкочастотный розовый шум; II — темно-коричневый шум на промежуточных частотах; III — почернение шумов с увеличением частоты.

таким образом, действительно "подкрашены" темными красками.

Согласно (6.5), (6.6) при переходе через частоту $f_* \sim 1 \times 10^{-2}$ Гц шумы в хвосте магнитосферы меняют свой цвет (от розового к темно-коричневому при нарастании частоты). Изменение цвета указывает на существование характерного "колена" в спектре турбулентности, разделяющего более плавную ($\sim f^{-1}$) и более крутую ($\sim f^{-7/3}$) составляющие зависимости $P(f)$ (рис. 10). Излом на частоте $f_* \sim 1 \times 10^{-2}$ Гц является своеобразной "визитной карточкой" магнитоплазменной турбулентности в токовом слое хвоста [126, 138–142]. Как следует из приведенных выше рассуждений, возникновение излома можно объяснить конвекцией фрактальных мозаик, на которых возбуждаются медленные коллективные движения; при этом розовый шум на низких частотах связан со стремлением динамических возбуждений подчиняться условиям СОК, в то время как темно-коричневый шум в области промежуточных частот обусловлен быстрым переносом фрактальных конфигураций (как единого целого) относительно неподвижного наблюдателя. В этой связи розовый шум в хвосте магнитосферы можно назвать *динамическим*, а темно-коричневый — *структурным*. Данная точка зрения подробно обсуждалась в оригинальных работах [47, 51, 130].

6.4. Черный шум на высоких частотах?

Остановимся в заключение на вероятных спектральных свойствах магнитоплазменной турбулентности в хвосте магнитосферы Земли на более высоких частотах

$$f \gtrsim f_{**} \sim \frac{|V \pm u|}{a}. \tag{6.8}$$

Интервалу (6.8) отвечают значения волнового вектора $k \gtrsim 1/a$, характеризующие вероятное распределение неоднородностей магнитного поля *внутри* сгустков. Считая сгустки бесструктурными элементами, припишем последним целочисленное значение хаусдорфовой размерности $d_f = 2$, совпадающее с топологической размерностью пространства вложения (в данном случае — с размерностью нейтральной плоскости хвоста $n = 2$). Как следует из (5.31), показатель спектра на

высоких частотах $f \gtrsim f_{**}$ равен $\varpi = 2n - 1 = 3$. С данным значением связан *черный шум* [28]

$$P(f) \sim f^{-3}. \tag{6.9}$$

Чтобы предположение о фрактальных свойствах мозаик имело смысл, размер сгустков турбулентного магнитного поля a вблизи основного НСС системы не менее чем на порядок величины должен отставать от корреляционной длины ξ . Соответственно черный шум $P(f) \sim f^{-3}$ в хвосте магнитосферы мог бы проявиться на частотах не ниже

$$f_{**} \gtrsim 10 \times f_* \sim 1 \times 10^{-1} \text{ Гц}. \tag{6.10}$$

Оценку (6.10) мы уточним в разделе 7: $f_{**} \sim (2 - 3) \times 10^{-1}$ Гц. Для сравнения, *частота Найквиста* в измерениях с борта космического аппарата Geotail, представившего уникальную информацию о тонкой структуре турбулентности в дальнем хвосте магнитосферы Земли, составила как раз 0,17 Гц [139], попав в область все той же f_{**} . В этой связи переход к черному шуму на высоких частотах $f \gtrsim (2 - 3) \times 10^{-1}$ Гц следует рассматривать как теоретическое предсказание фрактальной модели [47]. Ряд предварительных результатов, полученных в последнее время, свидетельствует в пользу такого перехода (G. Consolini, частное сообщение). Изменение цвета шума в области частот $f \sim f_{**} \sim (2 - 3) \times 10^{-1}$ Гц означает образование второго колена в спектре турбулентности (см. рис. 10) в дополнение к колену на частотах вблизи $f \sim f_* \sim 1 \times 10^{-2}$ Гц [47]. Подобно темно-коричневому, черный шум является *структурным* (в смысле, указанном в разделе 6.3). Отклонение $P(f)$ от черного шума в области высоких частот (6.10) может указывать на неустойчивость электронной компоненты тока и появление магнитных неоднородностей с длинами волн, существенно меньшими a [47]. Всестороннее исследование цветных шумов в хвосте магнитосферы Земли могло бы значительно расширить представления о сверхтонкой структуре турбулентных токовых слоев и в целом о динамических процессах, протекающих в неравновесной космической плазме.

7. Самосогласованная фрактальная модель турбулентного токового слоя

7.1. Система уравнений для токового слоя

Рассмотрим электродинамическую систему турбулентного токового слоя на столь больших временах, когда остаточными релаксационными явлениями, сопровождаемыми ее переходом к НСС, уже можно пренебречь. Введем систему координат (x, y, z) следующим образом: x — вдоль долей, y — поперек слоя, z — по нормали к нейтральной плоскости xu . (В геофизической литературе такую систему координат обычно называют GSM.) Полный ток поперек хвоста \mathbf{j} представим в виде суммы ненулевого среднего тока по y и флуктуирующей компоненты $\delta \mathbf{j}$, лежащей в плоскости xu :

$$\mathbf{j} = \langle \mathbf{j}_y \rangle + \delta \mathbf{j}, \tag{7.1}$$

$$\delta \mathbf{j} = \delta \mathbf{j}(x, y), \tag{7.2}$$

$$\langle \mathbf{j}_x \rangle = \langle \mathbf{j}_z \rangle = 0. \tag{7.3}$$

Вблизи основного (т.е. самого низкого в энергетическом выражении) НСС турбулентного ансамбля нормальную компоненту тока $\delta \mathbf{j}$ считаем равной нулю. Другими словами, геометрия полей и токов, стабилизирующих электродинамическую систему хвоста, не выходит за пределы распределения, близкого к двумерному. Более сложные — трехмерные — (квази)стационарные конфигурации в данном обзоре обсуждаться не будут. Поскольку вектор $\delta \mathbf{j}$ лежит в плоскости $xу$, единственной ненулевой составляющей турбулентного магнитного поля $\delta \mathbf{B}$ является его нормальная компонента:

$$\delta \mathbf{B} = \delta B_z(x, y). \quad (7.4)$$

Для поля в долях имеем

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_x(z). \quad (7.5)$$

Система уравнений Максвелла для турбулентного ансамбля в нейтральной плоскости токового слоя имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{B}_x = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j}_y \rangle, \quad (7.6)$$

$$\text{rot } \delta \mathbf{B}_z = \frac{4\pi}{c} \delta \mathbf{j}. \quad (7.7)$$

Систему (7.6), (7.7) следует дополнить уравнением непрерывности

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (7.8)$$

где \mathbf{j} определено соотношением (7.1).

7.2. Самосогласованная оценка размера сгустков

Нашей ближайшей задачей является исследование фрактальной структуры неадиабатического турбулентного токового слоя в самосогласованном режиме [47, 49]. В качестве первого шага получим оценку параметра a , определяющего минимальный размер сгустков турбулентного магнитного поля $\delta \mathbf{B}_z$ в слое. Будем считать, что поле $\delta \mathbf{B}_z$ порождается частицами, участвующими в процессах неадиабатического рассеяния. *A priori* можно утверждать, что ларморовский радиус таких частиц сопоставим с размером сгустков, $\ell_L \sim a$. Для определенности неадиабатические эффекты свяжем с ионами как более массивными частицами; электроны будем рассматривать как фон, обеспечивающий общую квазинейтральность системы. Проводимость токового слоя ограничена в этом случае частотой рассеяния частиц — ионов — на сгустках турбулентного магнитного поля $\delta \mathbf{B}_z$. Заметим, что величина ℓ_L в неадиабатическом токовом слое имеет смысл радиуса кривизны траектории в точке рассеяния. Поскольку ионы не успевают совершить полный оборот в поле $\delta \mathbf{B}_z$, реальному вращению отвечает лишь дуга ларморовской окружности, опирающаяся на угол $\chi \sim a/\ell_L$. Из уравнений Максвелла (7.6), (7.7) имеем, по порядку величины,

$$\langle j_y \rangle \sim \frac{c}{4\pi} \frac{B_0}{L}, \quad (7.9)$$

$$\delta j \sim \frac{c}{4\pi} \frac{\delta B_z}{a}, \quad (7.10)$$

где L — характерная толщина слоя, а δB_z — амплитуда поля $\delta \mathbf{B}_z$. Легко видеть, что относительные флуктуации тока $\delta j / \langle j_y \rangle$ в нейтральной плоскости слоя имеют порядок угла рассеяния χ :

$$\chi \sim \frac{a}{\ell_L} \sim \frac{\delta j}{\langle j_y \rangle}. \quad (7.11)$$

Исключая токи из уравнений (7.9), (7.10) с помощью (7.11), приходим к самосогласованной оценке параметра a :

$$a \sim \sqrt{bL\ell_L}, \quad (7.12)$$

где $b \equiv \delta B_z / B_0$. Заметим, что величина $\ell_0 \sim b\ell_L$ суть ларморовский радиус частиц в поле B_0 . Согласно (7.12), размер сгустков a есть среднее геометрическое толщины слоя L и ларморовского радиуса ℓ_0 :

$$a \sim \sqrt{L\ell_0}. \quad (7.13)$$

Масштаб a зависит, таким образом, лишь от внешних условий, характеризующих свойства магнитного поля в долях. Поскольку $\ell_0 \sim wmc/eB_0$, из (7.13) вытекает [49]:

$$a \sim \sqrt{\frac{wmcL}{eB_0}}. \quad (7.14)$$

Параметры m и e определяют массу и заряд носителей тока. Величину w можно рассматривать как "тепловую" скорость частиц — ионов — в нейтральной плоскости хвоста: $w \sim \sqrt{2T/m}$; при этом под T следует понимать обобщенную температуру, учитывающую дальнедействующие корреляции в системе [144]. Магнитное поле в долях B_0 легко оценить из баланса давлений: $B_0 \sim \sqrt{8\pi\rho T/m}$, где ρ — средняя плотность плазмы в слое; последняя оценка справедлива, если $b^2 \ll 1$. (Можно показать [51], что вблизи основного НСС относительные флуктуации магнитного поля в слое порядка $b \sim 0,3$.) Из соотношения (7.14) находим

$$a \sim \frac{\sqrt{mcL/e}}{4\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (7.15)$$

Для типичных значений [134, 135, 138] плотности плазмы ρ и толщины слоя L размер сгустков турбулентного магнитного поля составляет, согласно (7.15), $a \sim 8 \times 10^2$ км в дальнем хвосте магнитосферы Земли ($R \gtrsim 10^2 R_3$) и $a \sim 4 \times 10^2$ км в ближнем хвосте на подготовительной стадии развития суббури ($R \sim 10R_3$). Получим также отношение корреляционной длины ξ к размеру сгустков a : $\xi/a \sim 30$ в дальнем хвосте и $\xi/a \sim 20$ в ближнем хвосте перед суббурей. Наконец, уточним оценку (6.10) частоты f_{**} , определяющей переход от темно-коричневого шума к черному: $f_{**} \sim 3 \times 10^{-1}$ Гц в дальнем хвосте и $f_{**} \sim 2 \times 10^{-1}$ Гц в ближнем. Обсуждение полученных результатов в свете известных экспериментальных данных можно найти в [47, 51].

7.3. Оценка коэффициента турбулентного переноса

Для определения коэффициента турбулентного переноса \mathcal{D} в самосогласованном токовом слое вернемся к выражениям (3.5), (3.6), описывающим кинетику случайных процессов на фрактальной геометрии. Перепишем (3.5) в

виде

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = 2D\tau \left(\frac{t}{\tau} \right)^{2/(2+\theta)}, \quad (7.16)$$

выделив элементарный шаг по времени, $\tau \sim a/w$. Принимая во внимание, что частица смещается на расстояние порядка ларморовского радиуса ℓ_L за время порядка $t \sim \ell_L/w$, из (7.16) имеем

$$\ell_L^2 \sim 2D \frac{a}{w} \left(\frac{\ell_L}{a} \right)^{2/(2+\theta)}, \quad (7.17)$$

откуда коэффициент турбулентного переноса

$$D \sim \ell_L^2 \frac{w}{2a} \left(\frac{a}{\ell_L} \right)^{2/(2+\theta)}. \quad (7.18)$$

Параметр θ — индекс связности фрактальной мозаики в нейтральной плоскости токового слоя. В евклидовом пределе $\theta \rightarrow 0$ из (7.18) легко получить $D \sim \ell_L w/2$. Подчеркнем, что в общем случае коэффициент D зависит от размера сгустков a : $D \propto a^{-\theta/(2+\theta)}$. Поскольку ларморовский радиус частиц ℓ_L обратно пропорционален полю $b \equiv \delta B_z/B_0$, то коэффициент турбулентного переноса D убывает с b по степенному закону

$$D \propto b^{-2(1+\theta)/(2+\theta)}. \quad (7.19)$$

Для оценки эффективной проводимости слоя Υ воспользуемся известной формулой [145] $\Upsilon \sim [\rho e^2/m^2]\Theta$, где Θ — время между столкновениями. Параметр Θ можно выразить через коэффициент турбулентного переноса D из $\Theta \sim a^2/D$, откуда

$$\Upsilon \sim \frac{\rho e^2 a^2}{m^2} \times D^{-1}. \quad (7.20)$$

Комбинируя (7.19) и (7.20), получим, что проводимость турбулентного токового слоя ведет себя как степень $2(1+\theta)/(2+\theta)$ магнитного поля b :

$$\Upsilon \propto b^{2(1+\theta)/(2+\theta)}. \quad (7.21)$$

В евклидовом пределе $\theta \rightarrow 0$ имеем

$$\Upsilon \sim \frac{2\rho e^2 a^2}{w\ell_L m^2} \propto b.$$

7.4. Условие согласования

Аномальное поведение проводимости Υ при изменении магнитного поля $b \equiv \delta B_z/B_0$ в соотношении (7.21) должно быть согласовано с электродинамическими уравнениями (7.6), (7.7), определяющими фундаментальные структурные свойства магнитоплазменной турбулентности вблизи НСС. Покажем, что условие согласования выражается через зависимость хаусдорфовой размерности мозаики d_f от индекса связности θ . В самом деле, средний ток поперек слоя $\langle j_y \rangle$ пропорционален величине крупномасштабного магнитосферного электрического поля E_y , смотрящего в направлении с утра на вечер: $\langle j_y \rangle \sim \Upsilon E_y$. (Данное соотношение суть закон Ома для среднего тока.) Поскольку E_y является внешним (по отношению к электродинамической системе хвоста)

параметром, зависимость $\langle j_y \rangle$ от амплитуды турбулентного магнитного поля δB_z совпадает с (7.21):

$$\langle j_y \rangle \propto b^{2(1+\theta)/(2+\theta)}. \quad (7.22)$$

Согласно (7.11), относительные флуктуации тока $\delta j/\langle j_y \rangle$ в нейтральной плоскости хвоста имеют тот же порядок, что и угол рассеяния $\chi \sim a/\ell_L$. Так как $\ell_L \propto b^{-1}$, то для турбулентной компоненты δj находим

$$\delta j \propto b \times b^{2(1+\theta)/(2+\theta)}. \quad (7.23)$$

Амплитуду турбулентного магнитного поля будем рассматривать как функцию радиального масштаба r в плоскости xu :

$$b = b(r). \quad (7.24)$$

В дальнейшем нас будет интересовать интервал $a \lesssim r \lesssim \xi$, отвечающий самоподобному распределению сгустков поля в мозаиках. Величина $b(r)$ в (7.24) понимается как среднее (по абсолютной величине) магнитное поле на масштабе r ; при этом $b^2(r)$ имеет смысл средней плотности энергии $\varepsilon(r)$ для фрактального распределения:

$$\varepsilon(r) \propto b^2(r). \quad (7.25)$$

Зависимость $\varepsilon(r)$ для фрактальных полей может быть выражена через плотность числа структурных элементов $\mathfrak{Z}(r)$, образующих фрактальное множество; напомним, что функция $\mathfrak{Z}(r)$ определена выражением (2.2). Соответственно при $n = 2$ имеем

$$\varepsilon(r) \propto \mathfrak{Z}(r) \propto r^{d_f-2}, \quad (7.26)$$

где d_f представляет собой хаусдорфову размерность турбулентной мозаики. Из последних двух уравнений находим

$$b^2(r) \propto r^{d_f-2}. \quad (7.27)$$

Возвращаясь к (7.23), зафиксируем зависимость правой части (r.h.s.) уравнения (7.7) от магнитного поля b :

$$\text{r.h.s.} \propto b \times b^{2(1+\theta)/(2+\theta)}. \quad (7.28)$$

В левой части (l.h.s.) (7.7) операция rot , имеющая естественное представление в обычном базисе из трех ортонормированных векторов, применяется к полю $\delta \mathbf{B}_z(x, y)$, обладающему низкой размерностью $d_s = 2d_f/(2+\theta) \leq d_f < 2$. Возникающая при этом перепределенность векторного произведения $\nabla_r \times \delta \mathbf{B}_z$ приводит к затуханию rot в плоскости xu по степенному закону [50]

$$\text{rot} \propto r^{-\theta/(2+\theta)}. \quad (7.29)$$

Показатель степени в (7.29) зависит исключительно от индекса связности θ , характеризующего отклонение спектральной размерности d_s от хаусдорфовой размерности d_f . В евклидовом пределе ($\theta \rightarrow 0$) имеем $\text{rot} \propto \text{const}(r)$, как и должно быть. Таким образом, левая часть уравнения (7.7) как функция r принимает вид

$$\text{l.h.s.} \propto b \times r^{-\theta/(2+\theta)}. \quad (7.30)$$

Из соотношений (7.28), (7.30) находим

$$b^2(r) \propto r^{-\theta/(1+\theta)}. \quad (7.31)$$

Сравнивая (7.31) с (7.27), получаем искомое условие согласования

$$d_f = 2 - \frac{\theta}{1+\theta}. \quad (7.32)$$

В пределе $\theta \rightarrow 0$ имеем $d_f \rightarrow 2$, т.е. флуктуации заполняют собой плоскость xu при наложении евклидовой связности.

7.5. Значения хаусдорфовой размерности и индекса связности

Условие согласования (7.32) является одним из двух уравнений, необходимых для однозначного определения параметров d_f и θ вблизи основного НСС турбулентной системы. В качестве второго уравнения примем условие критичности (2.10), вытекающее из теоремы об универсальном значении. В терминах d_f и θ условие (2.10) может быть переписано в виде

$$\frac{2d_f}{2+\theta} = C \approx 1,327 \dots \sim \frac{4}{3}, \quad (7.33)$$

где мы воспользовались определением (2.7) спектральной размерности d_s . Комбинируя соотношения (7.32) и (7.33), для хаусдорфовой размерности d_f и индекса связности θ находим [47]

$$d_f = \frac{2+C}{2} \approx 1,66 \dots \sim \frac{5}{3}, \quad (7.34)$$

$$\theta = \frac{2-C}{C} \approx 0,51 \dots \sim \frac{1}{2}. \quad (7.35)$$

Значения (7.34), (7.35) полностью описывают фрактальную геометрию турбулентного токового слоя вблизи НСС. Подчеркнем, что в основном состоянии турбулентные мозаики заполняют лишь фрактальное подмножество нейтральной плоскости, обладающее дробной хаусдорфовой размерностью $d_f \sim 5/3 < 2$.

Согласно (3.5) и (7.16), среднеквадратическое смещение частиц $\langle r^2(t) \rangle$ поперек слоя возрастает с течением времени t как t^μ , где показатель $\mu = 2/(2+\theta)$. Из соотношения (7.35) находим $\mu = 2C/(2+C) \sim 0,8$. Соответственно показатель $H = C/(2+C) \sim 0,4$. Поскольку $H < 1/2$, то перенос частиц является субдиффузионным. Оценка $H \sim 0,4$ подтверждена в численных экспериментах [64] по неадиабатической динамике частиц в турбулентных токовых слоях. "Характерная" траектория частицы — иона — в нейтральной плоскости токового слоя при $b \sim 0,3$ показана на рис. 6 [64].

7.6. Спектр флуктуаций на промежуточных частотах

Нам осталось исполнить обещание, данное в разделе 6.3, об аккуратном вычислении показателя спектра ϖ на промежуточных частотах. Подставляя в (5.31) значение хаусдорфовой размерности d_f из (7.34), получим [47, 51]

$$\varpi = C + 1 \approx 2,33 \dots \sim \frac{7}{3}, \quad (7.36)$$

$$P(f) \sim f^{-7/3} \quad (7.37)$$

в хорошем согласии с данными наблюдений [126, 138–142]. Отличие спектра (7.37) от коричневого шума $P(f) \sim f^{-2}$ обусловлено дальнедействующими корреля-

ционными эффектами, вносящими определенный "регламент" в поведение турбулентного ансамбля вблизи НСС. Подробное сравнение (7.37) с экспериментом приведено в [47, 51].

7.7. Явление магнитосферной суббури

Отметим в заключение, что (квази)двумерные распределения вида (7.6), (7.7), отвечающие основному НСС турбулентного токового слоя, оказываются неустойчивыми при разности потенциалов поперек хвоста, превышающей некоторое критическое значение. Действительно, перепад потенциала является флуктуирующей величиной, зависящей от "погодных условий" в окрестности магнитосферы. Ухудшение космической погоды, вызванное возмущениями на Солнце, может приводить к кратковременной подаче "высокого напряжения" на токовый слой, индуцирующего бросок электрического тока $\langle \mathbf{j}_\parallel \rangle$. Большой поперечный ток замыкает элементы, формирующие разветвленную фрактальную сеть в нейтральной плоскости хвоста; токовая паутина грубеет, распадаясь на отдельные жгуты, а плотные сгустки турбулентного магнитного поля забивают собой нейтральную плоскость, выдавливая токи наружу. В результате в токовой системе хвоста образуются петли, нависающие над нейтральным слоем; в основании петель располагаются магнитные тромбы, не позволяющие частицам проходить сквозь слой так, чтобы те все время оставались в нейтральной плоскости [51]. Последовательность событий показана на рис. 11.

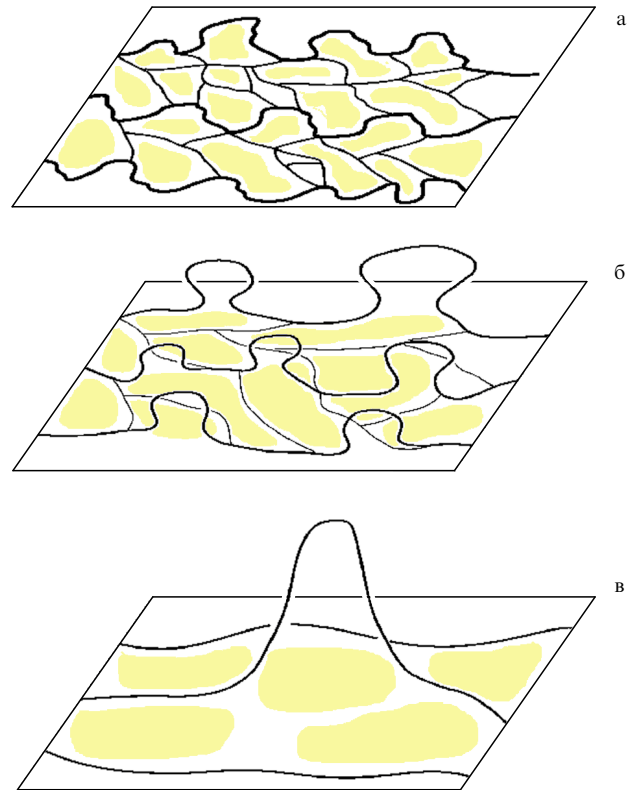


Рис. 11. Огрубление токовой паутины по мере возрастания разности потенциалов поперек хвоста. (а) Топология полей и токов вблизи основного неравновесного (квази)стационарного состояния. (б) Возникновение первичных флуктуаций тока за пределами нейтральной плоскости. (в) Образование крупномасштабных петель, нависающих над токовым слоем.

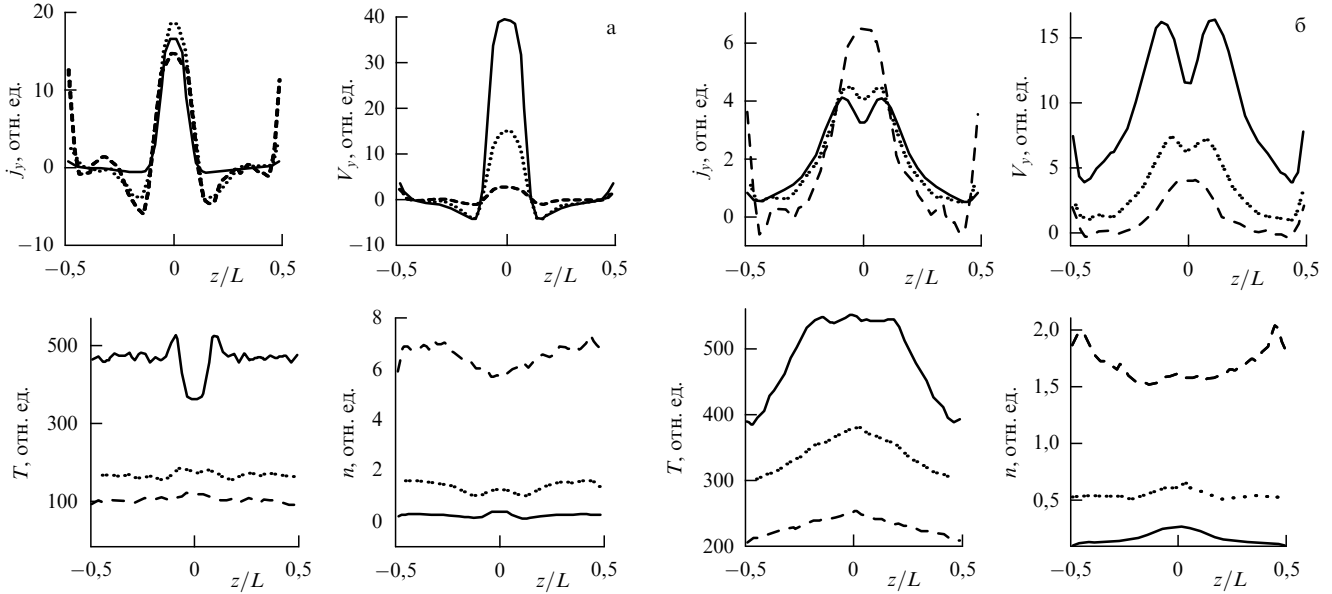


Рис. 12. (а) Вертикальный профиль тока ниже порога выхода петель ($b \leq 0,3$). Распределение характеризуется резким максимумом в окрестности нейтральной плоскости $z = 0$. Показан также профиль поперечной скорости частиц, V_y . Результаты получены путем численного моделирования при трех различных значениях плотности числа частиц n и температуры плазмы T , задаваемых на границах токового слоя. Различным граничным условиям соответствуют пунктирная, штриховая и сплошная линии. (б) То же, что на рис. 12а, но выше порога выхода петель ($b \geq 0,3$). Двугорбый профиль по току и скорости указывает на то, что частицам выгоднее "перепрыгнуть" через магнитные тромбы вместо того, чтобы "продираться" сквозь неоднородности поля, оставаясь всюду в нейтральной плоскости. Как только частицы начинают интенсивно "прыгать" (например, в случае подачи высокого напряжения на слой), токовая система "расползается" на петли.

Возникновение петель при усилении магнитного поля в тромбах подтверждается результатами численного моделирования [51]. В качестве иллюстрации на рис. 12 построен вертикальный профиль тока $\langle j_y \rangle$ в зависимости от z для двух характерных значений амплитуды турбулентного поля $b \equiv \delta B_z / B_0$, отвечающих состояниям системы до (рис. 12а) и после (рис. 12б) выхода петель из нейтральной плоскости токового слоя [51]. В первом случае ($b \lesssim 0,3$) профиль одногорбый, с резким максимумом в окрестности нейтральной плоскости $z = 0$; во втором ($b \gtrsim 0,3$) — двугорбый, с двумя симметричными максимумами выше и ниже нейтральной плоскости $z = 0$. С увеличением амплитуды турбулентного поля ($b \gtrsim 0,3$) двугорбая структура становится более выраженной: максимумы сдвигаются в сторону долей (т.е. петли растут по высоте), а провал при $z = 0$ углубляется [51]. Порог выхода $b \sim 0,3$ (соответствующий некоторому критическому перепаду потенциала поперек слоя) описывает предельную (квази)двумерную топологию турбулентного ансамбля.

Выше порога выхода огрубление токовой паутины может быть связано со структурной перестройкой турбулентной системы. В самом деле, рассмотрим петлю, висящую на высоте z над нейтральной плоскостью (рис. 13). Задача об устойчивости такой петли сводится к вычислению ее свободной энергии \mathcal{F} в зависимости от z . Всплытие петли приводит к двум основным эффектам: 1) возникновению натяжений в системе, стремящихся вернуть петлю "на место"; 2) переориентации всплывших петель относительно магнитного поля в долях. Как обычно, с *натяжениями* связан квадратичный вклад в свободную энергию системы: $\mathcal{F}_1 \sim pz^2$, где p — коэффициент упругости токовой паутины. Огрубление паутины приводит к постепенному уменьшению величины p вследствие замыкания элементов, образующих фрак-

тальную сеть. Напротив, *переориентация* проявляется в стремлении магнитного момента петли развернуться вдоль магнитного поля в долях (при всплытии момент направлен против поля). Выигрыш в свободной энергии при "правильном" расположении диполя составляет $-\mathcal{F}_2 \sim (q_0 / B_0) z B_x(z)$. В отличие от коэффициента упругости p , величина q_0 принимает постоянное значение, не зависящее от степени огрубления токовой паутины. По своему физическому смыслу параметр q_0 характеризует процессы взаимодействия петля с магнитным полем в долях и никак не связан с геометрией системы токов в нейтральной плоскости хвоста. Зависимость среднего магнитного поля в долях от z можно оценить из хорошо известного *распределения Харриса* [146], описывающего самосогласованное равновесие токового слоя по нормали к нейтральной плоскости: $B_x(z) \sim B_0 \tanh z$. Заметим, что z измеряется в единицах толщины слоя L [146]. Имеем, следовательно, $-\mathcal{F}_2 \sim q_0 z \tanh z$. Суммируя

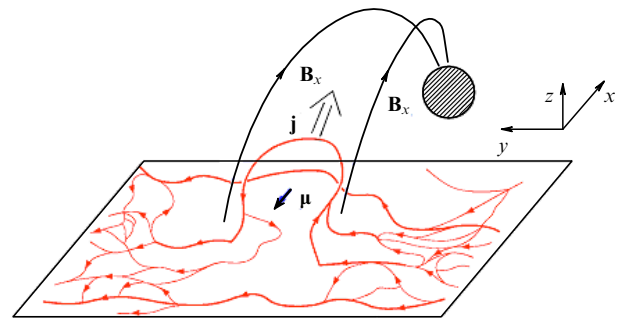


Рис. 13. Взаимодействие токовых петель с магнитным полем в долях. При всплытии петли магнитный момент μ направлен против поля B_x , а его абсолютная величина пропорциональна z .

вклады 1) и 2), получим полную свободную энергию петли

$$\mathcal{F}(z) \sim pz^2 - q_0z \tanh z. \quad (7.38)$$

Разлагая $\tanh z$ в ряд Тейлора при малых z и ограничиваясь членами второго порядка, из (7.38) находим [47, 51]

$$\mathcal{F}(z) \sim (p - q_0)z^2 + \left(\frac{q_0}{3}\right)z^4. \quad (7.39)$$

Разложение (7.39) совпадает с разложением свободной энергии в ряд по параметру порядка в теории Ландау фазовых переходов второго рода [147]; в качестве параметра порядка в данном случае выступает высота петель z . Если $p > q_0$, то свободная энергия $\mathcal{F}(z)$ минимальна при $z = 0$. Устойчивому состоянию системы отвечает (квази)двумерная конфигурация полей и токов (7.6), (7.7), обладающая большим поверхностным натяжением. Напротив, при $p < q_0$ (квази)двумерные фрактальные распределения теряют устойчивость. Поверхностное натяжение более не способно остановить спонтанный выход петель из нейтральной плоскости токового слоя. Понижение свободной энергии в системе достигается за счет *фазового перехода* к трехмерным турбулентным структурам, затрагивающим магнитное поле в долях. Переход (7.39) связан с изменением топологической размерности пространства вложения (от $n = 2$ к $n = 3$) и отражает глубокие изменения в симметриях турбулентного ансамбля [47]. Характерный размер турбулентной области по z составляет (в единицах L)

$$\Delta z \sim \sqrt{\frac{3(q_0 - p)}{q_0}}. \quad (7.40)$$

При $\Delta z \sim 1$ становится возможным пере замыкание петель через ионосферу Земли; при этом электрические токи к Земле и от Земли текут вдоль магнитного поля в долях (см. рис. 13). Эффект вызывает кардинальную перестройку всей токовой системы хвоста и по своим характеристикам напоминает явление *магнитосферной суббури* [47, 51]. В свете (7.39) начало магнитосферной суббури можно рассматривать как фазовый переход второго рода от (квази)двумерной к трехмерной конфигурации турбулентных полей и токов в хвосте магнитосферы [47, 51]. Кинетика перехода подчиняется теории Ландау [147]; порогом является значение $p = q_0$, отвечающее некоторому критическому току поперек хвоста $\langle j_y \rangle$. Критический ток обеспечивает "минимально необходимое" огрубление паутины, при котором образование петель становится термодинамически выгодным.

Огрубление токовой системы при $p \rightarrow q_0 + 0$ приводит к постепенному почернению спектра $P(f)$ на промежуточных частотах; второе колено в спектре при этом выпрямляется [47, 51]. К началу магнитосферной суббури (т.е. в момент пере замыкания токов на ионосферу) спектр мощности турбулентного магнитного поля [47, 51]

$$P(f) \rightarrow f^{-3} \quad (7.41)$$

в широком диапазоне частот $f \gtrsim f_*$. Почернение спектра отражает перераспределение энергии в пользу больших масштабов по мере усиления среднего тока поперек

хвоста. Эффект подтверждается анализом данных по турбулентному магнитному полю перед началом суббури [148].

8. Странные ускорения в турбулентных средах

До сих пор мы не учитывали влияние внутренней динамики НСС на распределение частиц по скоростям, фактически пренебрегая обменом энергией между частицами плазмы, блуждающими по лабиринтам фрактальных множеств, и флуктуациями электромагнитного поля, рассеивающего частицы. Поступая таким образом, мы сознательно отложили обсуждение ряда важных явлений, отражающих существенно неравновесную природу турбулентного состояния, до той стадии, на которой нас интересует вопрос о механизмах нагрева плазмы в турбулентной среде.

Действительно, процессы динамической релаксации, играющие — наравне с эффектами самоорганизации среды — первостепенную роль в формировании НСС, подразумевают обмен энергией между различными подсистемами, входящими в турбулентный ансамбль. К таким подсистемам обычно относят турбулентные поля, взаимодействующие как между собой, так и с захваченными ими частицами. Заметим, что токи, создаваемые частицами, сами могут быть источниками турбулентного поля. Система напоминает "кипящий котел" из частиц и полей, "уравновешивающих" друг друга вблизи НСС. Анализу такого рода состояний в космической плазме посвящены оригинальные работы [47, 49, 51, 99].

Переход турбулентной системы к НСС во многих случаях связан с появлением популяции горячих частиц, распределение которых по скоростям (энергиям) имеет степенной вид

$$\psi(w) \propto w^{-\varrho}, \quad (8.1)$$

$$\psi(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^{-\varrho/2}. \quad (8.2)$$

Входящая в (8.2) энергия частиц $\mathcal{E} \propto w^2$ велика по сравнению с характерной "температурой" ансамбля T , т.е. $\mathcal{E} \gg T$. Заметим, что величина T может не иметь смысла температуры в традиционном термодинамическом понимании [144]. Распределения вида (8.1), (8.2) часто называют "нетепловым хвостом" [149], подчеркивая существование протяженного "шлейфа" состояний с высокой энергией, вероятности которых экспоненциально малы в статистике Максвелла – Больцмана:

$$\psi(w) \propto \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right), \quad (8.3)$$

$$\psi(\mathcal{E}) \propto \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{T}\right). \quad (8.4)$$

Выражение (8.4) суть распределение Гиббса [147]. Нетепловые хвосты вида (8.1), (8.2) являются неотъемлемой чертой турбулентной плазмы; в качестве примеров укажем популяции, образующие плазменный слой магнитосферы Земли [149], а также частицы, приходящие к Земле в форме космических лучей [150].

Можно предположить, что показатель степени ϱ в распределении (8.1) связан с фундаментальными процессами, лежащими в основе нелинейной динамики НСС.

Описание такого рода процессов требует учета многомасштабных пространственно-временных корреляций (см. раздел 4) и может быть отнесено к компетенции *странной кинетики* [99]. Следуя [47, 99, 130], мы приступаем к изложению соответствующего подхода, ключевым звеном которого является нелинейное дробное кинетическое уравнение для функции распределения частиц плазмы по скоростям.

Ограничимся для определенности турбулентными *магнитоплазменными* системами, причем значение параметра β (т.е. давление плазмы, отнесенное к давлению поля) будем считать большим, $\beta \gg 1$. Последнее условие выполняется, в частности, для НСС в хвосте магнитосферы Земли.

При больших β процессы самоорганизации в системе приводят к концентрации турбулентного магнитного поля в сгустки, образующие фрактальные "мозаики" в конфигурационном пространстве системы. Мозаики являются динамическими структурами, участвующими в процессах "самоперетекания" (см. раздел 5). В простейшем случае "самоперетекание" можно отождествить с медленным когерентным блужданием сгустков по конфигурационному пространству под действием тех или иных корреляционных эффектов; в качестве примера приведем случайные блуждания во фрактальном времени (СБФВ, см. раздел 4), отнесенные к сгусткам как к "элементарным" переносчикам поля. (Альтернативный подход апеллирует к покоящимся сгусткам, магнитные поля которых явно зависят от времени. Данный случай нами рассматриваться не будет.)

8.1. Ускорение Ферми

Легко видеть, что взаимодействие частиц со сгустками приводит к постепенному разогреву плазмы. Объяснение заключается в том, что при хаотическом распределении сгустков по скоростям столкновений больше с телами, движущимися навстречу частице, что в среднем приводит к возрастанию ее кинетической энергии [151]. Данный механизм был впервые предложен в работе Ферми [152] в предположении, что рассеяние частиц на сгустках — "магнитных облаках" — носит случайный (гауссов) характер. При гауссовом рассеянии среднее квадратическое изменение скоростей частиц пропорционально времени нахождения в области турбулентности:

$$\langle \delta \mathbf{w}^2(t) \rangle \propto t. \quad (8.5)$$

Переменная \mathbf{w} в соотношении (8.5) представляет собой текущее значение вектора скорости частицы. Зависимость (8.5) приводит к стандартному уравнению диффузии для плотности вероятности $\psi = \psi(t, \mathbf{w})$ [151]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta_{\mathbf{w}} \psi. \quad (8.6)$$

Процесс (8.6), отвечающий диффузионному гауссову ускорению, можно рассматривать как случайное броуновское движение частицы в (трехмерном) пространстве скоростей $\{\mathbf{w}\}$. Заметим, что (8.6) вполне аналогично (3.14). В уравнении (8.6) $\Delta_{\mathbf{w}}$ — обычный трехмерный оператор Лапласа. Распределение частиц по скоростям $\psi = \psi(t, \mathbf{w})$ удовлетворяет естественному условию нормировки [ср. (3.15)]

$$\int \psi d\mathbf{w} = 1. \quad (8.7)$$

8.2. Учет корреляций

Вытекающее из общих свойств гауссовых случайных процессов диффузионное уравнение (8.6) не учитывает многомасштабные пространственно-временные корреляции, играющие ключевую роль в динамике НСС. Адекватный анализ корреляционных явлений требует отказа от простейшей модели (8.5), (8.6), основанной на понятии случайного броуновского движения. Соответствующие обобщения достигаются в свете теории *странных* процессов переноса в пространстве скоростей \mathbf{w} [99]. В самом деле, следуя общим методам, описанным в разделе 4, заменим диффузионное уравнение (8.6) на уравнение переноса в дробных производных по переменным t и \mathbf{w} [99]:

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = \nabla_{\mathbf{w}}^{2\beta} \psi, \quad (8.8)$$

где $0 \leq \alpha \leq 2$ и $1 \leq 2\beta < 2$ — обобщенные индексы дифференцирования. Уравнение (8.8) соотносит принципы дробной динамики с процессами, протекающими в фазовом пространстве турбулентной системы.

8.3. Дробная производная по времени

Производная $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$, стоящая в левой части (8.8), определяется через оператор Римана–Лиувилля (4.2), причем индекс $0 \leq \alpha \leq 2$ имеет смысл фрактальной размерности активного времени. Замена $\partial / \partial t \rightarrow \partial^\alpha / \partial t^\alpha$ в диффузионном уравнении (8.6) означает переход от случайного броуновского движения в пространстве скоростей $\{\mathbf{w}\}$ к случайным блужданиям во фрактальном времени (СБФВ). Статистика СБФВ подробно обсуждалась в разделе 4 в контексте странных процессов переноса в конфигурационном пространстве $\{\mathbf{r}\}$; полученные там результаты остаются в силе с точностью до замены переменной \mathbf{r} на \mathbf{w} .

Явления типа СБФВ, отнесенные к пространству $\{\mathbf{w}\}$, представляют собой *ускорения во фрактальном времени*. Среднеквадратическое изменение скорости частицы, испытывающей ускорение во фрактальном времени размерностью α , составляет (за реальное время t)

$$\langle \delta \mathbf{w}^2(t) \rangle \propto t^\alpha, \quad (8.9)$$

при этом коррелятор

$$\mathcal{O}(t) \equiv - \frac{\langle \delta \mathbf{w}(-t) \delta \mathbf{w}(t) \rangle}{\langle \delta \mathbf{w}^2(t) \rangle} = 2^{\alpha-1} - 1 \quad (8.10)$$

прошлых и будущих приращений скорости \mathbf{w} определяется выражением (4.4). Необходимо различать *персистентные* и *антиперсистентные* ускорения в зависимости от знака коррелятора: $\mathcal{O}(t) > 0$ и $1 < \alpha \leq 2$ для персистентных процессов и $\mathcal{O}(t) < 0$ и $0 \leq \alpha < 1$ для антиперсистентных. Промежуточный режим $\mathcal{O}(t) = 0$, $\alpha = 1$ соответствует диффузионному ускорению без корреляций. Подчеркнем, что ускорения во фрактальном времени являются немарковскими процессами: $\mathcal{O}(t) \neq 0$ при $\alpha \neq 1$.

8.4. Дробная производная по фазовой переменной

Дробная производная по скорости $\nabla_{\mathbf{w}}^{2\beta}$ в правой части (8.8) определяется через оператор Рисса–Вейля (4.5), в котором вместо переменной \mathbf{r} следует подставить \mathbf{w} . Несобственный характер интегрирования в операторе

Рисса – Вейля учитывает высокоэнергетические частицы, скорости которых могут существенно превышать соответствующие "тепловые" значения. С оператором Рисса – Вейля связана статистика Леви, базирующаяся на представлении о мгновенных скачках — "полетах" — частиц из одной точки пространства в другую. Процессы Леви в пространстве скоростей $\{\mathbf{w}\}$ можно рассматривать как "жесткие" ускорения, при которых частица "мгновенно" (т.е. с пренебрежимо малой инерцией) получает конечную порцию кинетической энергии в результате взаимодействия с турбулентным полем. По всей вероятности, жестким ускорениям принадлежит доминирующая роль на стадии *бурной релаксации*, когда происходит интенсивный обмен энергией между различными частями системы. В качестве примера приведем ускорение частиц в мощных турбулентных потоках при числах Рейнольдса $\mathcal{R}_* \gtrsim 10^3$ [66]. Подчеркнем, что частицы, участвующие в процессах ускорения, понимаются как неотъемлемая часть турбулентного ансамбля.

8.5. Замечание о терминологии

Следуя терминологии, сложившейся в дробной динамике, условимся называть все процессы, удовлетворяющие обобщенному уравнению (8.8), *странными ускорениями* [99]. К *странным* относятся, таким образом, как ускорения во фрактальном времени (СБФВ), так и процессы Леви в пространстве скоростей. В силу (8.9) ускорения во фрактальном времени являются естественным обобщением диффузионного процесса Ферми (8.5); последнее представляет собой частный случай СБФВ при $\alpha = 1$. Ускорения во фрактальном времени будем называть *странными процессами Ферми* [99].

8.6. На пути к НСС: промежуточное состояние

Предположим, что система уже прошла начальную стадию бурной релаксации и находится в некотором промежуточном неравновесном состоянии, постепенно эволюционирующем в направлении к НСС (рис. 14). В отличие от периода бурной релаксации, когда спор между полями и частицами за положение в фазовом пространстве решается на дуэли жестких ускорений, для промежуточного состояния характерно более плавное перераспределение энергии, связанное со свойством немарковости и преобладанием многомасштабных корреляций во времени. В промежуточном состоянии,

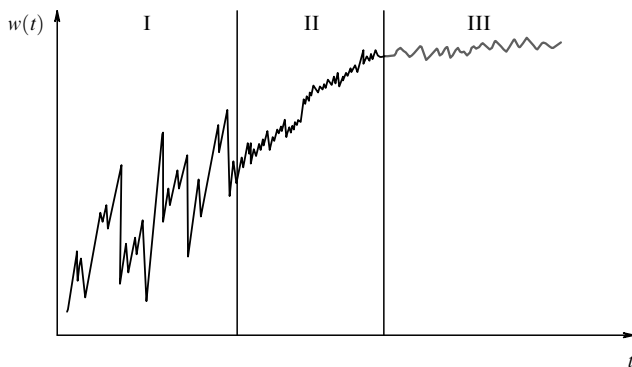


Рис. 14. Последовательные стадии перехода динамической системы к неравновесному (квази)стационарному состоянию. I — бурная релаксация; II — промежуточное состояние; III — предел НСС.

однако, турбулентность еще не представляет тот целостный нелинейный ансамбль, который можно было бы отождествить с понятием НСС, и для описания динамики ускорений мы вполне можем ограничиться приближением пробных частиц. Соответствующее кинетическое уравнение для функции $\psi(t, \mathbf{w})$ имеет вид

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = \nabla_{\mathbf{w}}^2 \psi. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) вытекает из (8.8) в пределе $\beta \rightarrow 1$, означающем, что процессами Леви в среде можно пренебречь. Заметим, что (8.11) представляет собой не что иное, как дробное уравнение диффузии в пространстве скоростей, а его физической реализацией являются странные процессы Ферми.

Во избежание излишних осложнений будем считать, что турбулентная система изотропна. (Эффекты, связанные с анизотропией, могут быть обусловлены, в частности, влиянием внешнего крупномасштабного магнитного поля, например, межгалактического, если речь идет об ускорении космических лучей.) Имеем $\psi(t, \mathbf{w}) = \psi(t, w)$ и $\Delta_{\mathbf{w}} = \Delta_w$, где $w \equiv |\mathbf{w}|$. Радиальная часть лапласиана Δ_w в трехмерном пространстве $\{\mathbf{w}\} \sim E^3$ может быть представлена в виде

$$\Delta_w \psi \equiv \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[w^2 \mathcal{D}_w \frac{\partial \psi}{\partial w} \right]. \quad (8.12)$$

Входящую в (8.12) функцию \mathcal{D}_w будем рассматривать как зависящий от w коэффициент турбулентного переноса в пространстве скоростей.

8.7. Поведение коэффициента переноса

По своему физическому смыслу коэффициент \mathcal{D}_w в уравнении (8.12) должен удовлетворять соотношениям

$$\mathcal{D}_w = \frac{\langle \delta w^2(t) \rangle}{t^\alpha} \sim \frac{[\delta w(\tau)]^2}{\tau^\alpha}, \quad (8.13)$$

где $\tau \sim a/w$ — элементарный шаг кинетического процесса по времени; a определяет характерный размер сгустков турбулентного поля (скажем, диаметр магнитных облаков); $\delta w(\tau) \sim g\tau$ представляет собой изменение скорости частицы за время τ ; и наконец g описывает среднее ускорение частицы в турбулентной области. Заметим, что шаг τ входит в (8.13) в аномальной степени α , совпадающей с фрактальной размерностью активного времени (см. (8.9)); выражение (8.13), таким образом, согласовано с дробной производной по времени $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$ в левой части (8.11). Заметим также, что дисперсия $\langle \delta w^2(t) \rangle \sim g^2 \tau^2 (t/\tau)^\alpha$ при $t \gg \tau$. Следовательно,

$$\mathcal{D}_w \sim \frac{g^2 \tau^2}{t^\alpha} \sim \mathcal{K} w^{\alpha-2}, \quad (8.14)$$

где параметр $\mathcal{K} = \text{const}(w)$ не зависит от w . В гауссовом пределе $\alpha \rightarrow 1$ коэффициент турбулентного переноса \mathcal{D}_w убывает обратно пропорционально скорости w . Это связано со все уменьшающимся временем взаимодействия частицы $\tau \sim a/w$ с магнитными облаками по мере роста ее кинетической энергии $\mathcal{E} = w^2/2$.

8.8. Обобщенные законы ускорения

Подставляя коэффициент турбулентного переноса (8.14) в дробное уравнение диффузии (8.11), находим для

функции распределения $\psi = \psi(t, w)$:

$$\frac{1}{\mathcal{K}} \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[w^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial w} \right]. \quad (8.15)$$

Общее решение уравнения (8.15) при произвольных начальных условиях может быть выражено через функции Фокса, приведенные в [100]. Для исследования динамики ускорения воспользуемся приемом, описанным в разделе 4. Умножим обе части уравнения (8.15) на $w^{4-\alpha}$ и проинтегрируем по пространству скоростей $\{w\}$: $\int dw \equiv 4\pi \int_0^\infty w^2 dw$. В левой части (8.15) вынесем операцию интегро-дифференцирования по времени за знак интеграла по скоростям и заменим частную производную $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$ на полную дробную производную d^α / dt^α . Оставшийся под знаком дробного дифференцирования интеграл по переменной w дает среднее по ансамблю $\langle w^{4-\alpha} \rangle_\psi$. В правой части (8.15) проинтегрируем два раза по частям с учетом условия нормировки (8.7); результатом будет служить постоянная $3(4-\alpha)$. Имеем, следовательно,

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \langle w^{4-\alpha} \rangle_\psi = 3(4-\alpha) \mathcal{K}. \quad (8.16)$$

Интегрируя (8.16), находим

$$\langle w^{4-\alpha} \rangle_\psi = \frac{3(4-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \mathcal{K} \times t^\alpha. \quad (8.17)$$

Из соотношения (8.17) легко видеть, что скорость частиц в среднем растёт как

$$\langle w \rangle_\psi \sim \text{const} \times t^\zeta \quad (t \rightarrow \infty), \quad (8.18)$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{4-\alpha}. \quad (8.19)$$

Полагая $\alpha = 1$ в выражениях (8.18), (8.19), приходим к "закону 1/3" для обычного ускорения Ферми [151]:

$$\langle w \rangle_\psi \sim \text{const} \times t^{1/3} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (8.20)$$

"Закон 1/3" соответствует гауссову случайному процессу (8.6). Возвращаясь к (8.18), получим для кинетической энергии ($\mathcal{E} \propto w^2$) частиц

$$\langle \mathcal{E} \rangle_\psi \sim \text{const} \times t^{2\zeta} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (8.21)$$

Как следует из (8.19), персистентные процессы ($1 < \alpha \leq 2$) соответствуют значениям $1/3 < \zeta \leq 1$, а антиперсистентные ($0 \leq \alpha < 1$) — значениям $0 \leq \zeta < 1/3$. Персистентные (антиперсистентные) процессы ускорения протекают в более быстром (медленном) ритме по отношению к стандартному процессу Ферми. В предельном случае $\zeta = 1$ ($\alpha = 2$) частицы разгоняются вдоль баллистических траекторий в пространстве $\{w\}$. Обратный предельный случай $\zeta = 0$ ($\alpha = 0$) отвечает частицам, захваченным на изоэнергетических орбитах $w = \text{const}$. Странные процессы Ферми ($0 \leq \zeta \leq 1$) играют важную роль в распределении частиц по энергиям в плазменном слое магнитосферы Земли [47, 99].

9. Нелинейное кинетическое уравнение

9.1. Самодействие турбулентного поля

Важно подчеркнуть, что результаты, представленные в разделе 8, относятся к пробным частицам и никак не

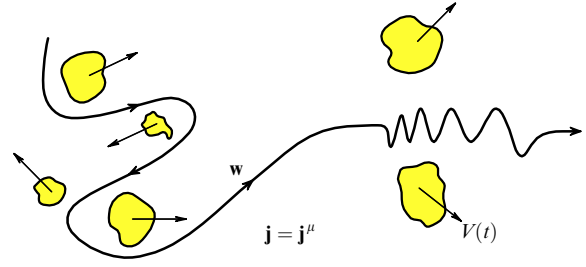


Рис. 15. Самодействие турбулентного ансамбля вблизи НСС. Частица, участвующая в процессах турбулентного ускорения, вынуждена отдавать все большую часть набранной энергии в виде "налога" на воспроизводство поля.

учитывают *обратное влияние* горячей плазмы на турбулентное поле. Обратное влияние, однако, с неизбежностью вступает в игру по мере приближения системы к НСС (см. рис. 14), когда поля и плазма начинают согласованно "вариться в общем котле". Эффект можно рассматривать как *самодействие* турбулентного ансамбля, вносящее существенный фактор *нелинейности* в динамику системы. Самодействие проявляется в генерации магнитного поля заряженными частицами, участвующими в процессах странного ускорения в турбулентной области (рис. 15). Поскольку генерация поля требует определенных затрат энергии, эффекты самодействия ограничивают ускорение частиц в среде и так или иначе регулируют распределение частиц по энергиям.

Принимая во внимание эффекты самодействия, добавим в правую часть кинетического уравнения (8.8) *сток* частиц s.t. (sink term), отдающих энергию на воспроизводство поля:

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = \nabla_w^{2\beta} \psi + \text{s.t.} \quad (9.1)$$

В электродинамических системах член s.t. является квадратичным функционалом от токов, индуцированных в среде:

$$\text{s.t.} = -\mathcal{G}_{\mu\nu} j^\mu j^\nu, \quad (9.2)$$

где j^μ ($\mu = 1, 2, 3$) — зависящие от скорости w ковариантные компоненты тока \mathbf{j} , а элементы $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ образуют невырожденную симметричную 3×3 матрицу — такую, что квадратичная форма s.t. отрицательно определена. В уравнении (9.2) предполагается суммирование по повторяющимся индексам μ и ν . Для изотропных систем имеем $\mathcal{G}_{\mu\nu} = 4\pi w^2 \mathcal{G} \delta_{\mu\nu}$, где диагональный элемент \mathcal{G} характеризует интенсивность процессов самодействия вблизи НСС, $4\pi w^2$ представляет собой плотность состояний частиц в трехмерном пространстве скоростей $\{w\}$, $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера. Соответственно, форма (9.2) принимает вид

$$\text{s.t.} = -4\pi w^2 \mathcal{G} j_\mu j^\mu. \quad (9.3)$$

Комбинируя (9.1) и (9.3), для функции распределения частиц плазмы по скоростям $\psi = \psi(t, w)$ получим

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = \nabla_w^{2\beta} \psi - 4\pi w^2 \mathcal{G} j_\mu j^\mu. \quad (9.4)$$

Будем считать, что система настолько близка к НСС, что полетами Леви в пространстве скоростей (т.е. жесткими ускорениями, характерными для периода бурной релаксации) можно пренебречь. Положим соответственно индекс дифференцирования β в уравнении (9.4) равным 1. Далее, подбирая должную нормировку к амплитуде взаимодействия \mathcal{G} , отнесем электрические токи j_μ к движению одной частицы. Поскольку свертка $j_\mu j^\mu$ представляет собой инвариантную величину — скаляр \mathbf{j}^2 , — то для ее вычисления мы можем перейти к любым криволинейным координатам. В частности, мы можем отслеживать ускорение каждой частицы вдоль ее траектории, фиксируя момент, когда та разгонится до некоторой наперед заданной скорости w (см. рис. 15). Предположим также, что элементарных актов ускорения (рассеяния на сгустках поля) так много, что вектор \mathbf{w} успевает "осмотреть" все объемлющее пространство $\{\mathbf{w}\}$ прежде, чем его длина существенно изменится. Усредняя по направлениям \mathbf{w} , выразим набранное значение плотности тока $j = |\mathbf{j}|$ через самосогласованную функцию распределения $\psi = \psi(t, w)$:

$$j(t, w) = 4\pi e \int_V^w u^3 \psi(t, u) du. \quad (9.5)$$

Заметим, что эффекты самосогласования вступают в игру лишь по завершении периода бурной релаксации, когда система уже "крепко схвачена" корреляциями. Интегрирование в (9.5) осуществляется в пределах от $u_{\min} \sim V$ до $u_{\max} \sim w$, где $w \gg V$, а величина V имеет смысл характерной групповой скорости сгустков турбулентного магнитного поля вблизи НСС. Поскольку переменная u удовлетворяет условию $V \lesssim u \lesssim w$, выражение (9.3) учитывает процессы генерации поля до тех пор, пока первоначально холодная ($u \sim V$) частица не достигнет заданной скорости $w \gg V$ в процессе турбулентного ускорения.

9.2. Кинетическое уравнение для систем с самодействием

Комбинируя (8.15) и (9.4), (9.5), находим [99]

$$\frac{1}{\mathcal{K}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[w^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial w} \right] - \mathcal{J} w^2 \left[\int_V^w u^3 \psi du \right]^2, \quad (9.6)$$

где $\mathcal{J} = 64\pi^3 e^2 \mathcal{G} / \mathcal{K} = \text{const}$. Совместно с оператором Римана–Лиувилля (4.2) уравнение (9.6) образует полную самосогласованную систему интегро-дифференциальных кинетических уравнений для турбулентных электродинамических систем с самодействием вблизи НСС.

Уравнение (9.6) описывает богатый спектр странных динамических процессов, протекающих в нелинейных системах с сильной турбулентностью. Нас будут, главным образом, интересовать стационарные решения кинетического уравнения (9.6), не зависящие явно от времени: $\psi = \psi(w)$.

Важный момент заключается в том, что дробная производная (4.2) от стационарной функции распределения $\psi = \psi(w)$ не обращается автоматически в нуль. Имеет место

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} = \frac{\psi}{\Gamma(1-\alpha)} \times t^{-\alpha}. \quad (9.7)$$

Выражение (9.7) соответствует так называемой *релаксации Миттага–Леффлера*, характеризующей поведение неравновесных динамических систем с многомасштабными корреляциями во времени [153]. В контексте модели (9.6) процесс Миттага–Леффлера отвечает за постепенный переход системы из промежуточного неравновесного состояния собственно к НСС (см. рис. 14). Интересующее нас стационарное решение $\psi = \psi(w)$ можно рассматривать как предельное ($t \rightarrow \infty$) распределение частиц по скоростям, возникающее на столь больших временах, что остаточными релаксационными явлениями в системе уже можно пренебречь. Стационарная функция распределения $\psi = \psi(w)$ при $\alpha > 0$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[w^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial w} \right] = \mathcal{J} w^2 \left[\int_V^w u^3 \psi du \right]^2. \quad (9.8)$$

9.3. Самоподобные функции распределения

В самосогласованном режиме ускорения во фрактальном времени приводят к самоподобному распределению частиц по скоростям, обладающему свойством масштабной инвариантности относительно преобразования фазовой переменной:

$$\psi(w) \propto w^{-\varrho}, \quad (9.9)$$

где показатель $\varrho = \text{const}(w)$ при $w \gg V$. Подставляя распределение (9.9) в кинетическое уравнение (9.8), приходим к соотношению, связывающему параметр ϱ с фрактальной размерностью активного времени $\alpha > 0$:

$$\varrho = 14 - \alpha. \quad (9.10)$$

Соответственно, распределение частиц по энергиям имеет степенной вид

$$\psi(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^{-\eta}, \quad (9.11)$$

$$\eta = \frac{\varrho}{2} = 7 - \frac{\alpha}{2}. \quad (9.12)$$

Зависимость (9.9) с показателем (9.10) представляет распределение частиц плазмы по скоростям в основном неравновесном (квази)стационарном состоянии турбулентного ансамбля ($t \rightarrow \infty$). Поскольку скорости частиц $w \gg V$, то решения (9.9) и (9.11) отвечают высокоэнергетичным нетепловым хвостам в уравнениях (8.1), (8.2).

9.4. Ограничения на параметр η

Из соотношения (9.12) вытекает, что персистентные процессы ($1 < \alpha \leq 2$) отвечают значениям $6 \leq \eta < 6.5$, в то время как антиперсистентные ($0 < \alpha < 1$) — значениям $6.5 < \eta < 7$. Диффузионному ускорению Ферми (8.6) соответствует показатель $\eta = 6.5$. Следовательно, параметр η для турбулентных систем вблизи НСС изменяется в пределах [99, 130]:

$$6 \leq \eta < 7, \quad (9.13)$$

где учтено условие $\alpha > 0$ на фрактальную размерность активного времени. Нетепловое распределение (9.11) содержит существенный избыток энергии по сравнению с распределением Гиббса (8.4). Избыточная энергия

обусловлена процессами (странного) ускорения, сопровождающимися релаксацией системы к НСС. Поскольку ускорение частиц в конечном счете связано с внутренней динамикой турбулентного ансамбля, формирование нетепловых функций распределения (9.11) должно сопровождаться низкочастотными ($f \lesssim V/\xi$) шумами с характерным степенным спектром мощности (5.17). Чем ближе система к НСС, тем светлее шум на низких частотах. Преобладание розовых оттенков указывает на стабилизацию системы в предельном НСС, отвечающем самоорганизованной критичности (5.27). Цвет шума на низких частотах можно, таким образом, рассматривать как индикатор близости системы к СОК, или как степень ее "предельности" [130].

По всей вероятности, описанные выше (см. разделы 8, 9) динамические процессы отвечают за разогрев холодной плазмы, попадающей в плазменный слой магнитосферы Земли из солнечного ветра [47, 130]. Действительно, характерные температуры ионов в плазменном слое $T_{\text{ПС}} \sim 1-5$ кэВ и солнечном ветре после торможения и частичного подогрева на околоземной ударной волне $T_{\text{СВ}} \sim 10^2$ эВ различаются в 10–50 раз. Столь существенные различия можно объяснить лишь работой "внутренних" механизмов ускорения, функционирующих непосредственно в плазменном слое. Холодная плазма, втекающая в магнитосферу, оказывается как бы в микроволновой печи, служащей для "приготовления" самосогласованного турбулентного "пирога".

9.5. Каппа-распределения

Нетепловые распределения $\psi = \psi(\mathcal{E})$, обнаруживающие существование степенных хвостов (8.2) и (9.11) в области высоких энергий $\mathcal{E} \gg T$, во многих случаях удобно аппроксимировать так называемыми *каппа-функциями* [149]. К каппа-функциям обычно относят распределения вида

$$\psi(\mathcal{E}) \sim A \left[1 + \frac{\mathcal{E}/T}{\kappa + 1} \right]^{-(\kappa+1)}, \quad (9.14)$$

где $\kappa \geq 0$ — некоторый параметр, принимающий действительные неотрицательные значения, а величина A имеет смысл нормировочной постоянной. Каппа-функции представляют собой удобную аналитическую интерполяцию от распределения Гиббса (8.4) в области низких энергий $\mathcal{E} \lesssim T$ к нетепловым распределениям степенного вида (8.2) и (9.11) при $\mathcal{E} \gg T$. В пределе $\kappa \rightarrow \infty$ каппа-функции вырождаются в распределение Гиббса.

Каппа-распределения были получены при описании неравновесной плазмы, взаимодействующей с нетепловым радиационным фоном [154]. К каппа-распределениям могут также приводить процессы рассеяния частиц на плазменных колебаниях, например, на вистлерах [155]. С каппа-функциями связан ряд симметрий в системе уравнений Максвелла–Власова [156]; о существовании таких симметрий говорят результаты групповой классификации уравнений Максвелла–Власова, приведенные в [156]. Приложения каппа-функций к турбулентности космической плазмы обсуждались в [149, 157–159]. Можно показать [144], что каппа-функции представляют собой канонические распределения в обобщенной статистике Дароци–Тсаллиса (точно так же, как распределение Гиббса является каноническим в статистике Больцмана).

Сравнивая (9.14) с (8.2) и (9.11) в нетепловой области $\mathcal{E} \gg T$, получим соотношение, связывающее параметры η , ϱ и κ :

$$\eta = \frac{\varrho}{2} = \kappa + 1. \quad (9.15)$$

Объединяя (9.13) и (9.15), находим разброс значений параметра κ для турбулентных магнитоплазменных систем вблизи НСС:

$$5 \leq \kappa < 6. \quad (9.16)$$

9.6. Популяции горячих частиц в магнитосфере Земли

В космической электродинамике каппа-функции возникают, в частности, при описании популяций частиц, "населяющих" плазменный слой магнитосферы Земли [149]. Параметры соответствующего каппа-распределения впервые получены в ходе магнитоплазменных экспериментов с борта космического аппарата ISEE-3 [149]. Как отмечено в [149, с. 13409], характерные значения κ как для электронов, так и ионов лежат в пределах от 4 до 8, причем наиболее вероятная оценка приходится на интервал между 5 и 6. Данные наблюдений, таким образом, полностью подтверждают неравенство (9.16), вытекающее из кинетического уравнения (9.6). Результаты [149], хорошо известные в геофизической литературе, отражают, следовательно, фундаментальные свойства турбулентных полей и плазмы, образующих самосогласованную нелинейную термодинамическую систему вдали от теплового равновесия. Уместно подчеркнуть, что магнитосфера Земли представляет собой уникальную природную лабораторию, открывающую широкие возможности для всестороннего исследования странных кинетических процессов в турбулентных средах.

9.7. Бурная релаксация и спектры космических лучей

Интересно сопоставить значения показателя η из интервала (9.13) с наклоном функции распределения частиц плазмы по энергиям на стадии бурной релаксации, когда энергетический спектр $\psi(\mathcal{E})$ формируется главным образом за счет жестких ускорений, отвечающих процессам Леви в турбулентной области. Динамика ускорения подчиняется кинетическому уравнению (8.8) с целой ($\alpha \rightarrow 1$) производной по времени $\partial\psi/\partial t$ в левой части; справа оператор Рисса–Вейля $\nabla_w^{2\beta}$ содержит интегрирование дробного порядка $1 \leq 2\beta < 2$. Коэффициент турбулентного переноса \mathcal{D}_w на стадии бурной релаксации отличается от (8.13) дробной степенью при δw и целой при t :

$$\mathcal{D}_w = \frac{\langle \delta w^{2\beta}(t) \rangle}{t} \sim \frac{[\delta w(\tau)]^{2\beta}}{\tau}. \quad (9.17)$$

Пренебрежение процессами типа СБФВ ($\alpha \rightarrow 1$) на фоне жестких ускорений ($1 \leq 2\beta < 2$) противоположно условиям, сформулированным в разделе 8 для промежуточного состояния: $\beta \rightarrow 1$ и $0 < \alpha \leq 2$. Однако и в том, и в другом случае мы можем ограничиться рассмотрением только пробных частиц. Учитывая соотношения $\tau \sim a/w$ и $\delta w(\tau) \sim g\tau$ для элементарных актов ускорения, вместо (8.14) получим

$$\mathcal{D}_w \sim \frac{g^{2\beta} \tau^{2\beta}}{\tau} \sim \mathcal{K} w^{1-2\beta}. \quad (9.18)$$

Соответственно радиальная часть $\nabla_w^{2\beta}$ оператора Рисса – Вейля $\nabla_w^{2\beta}$ в трехмерном ($d\mathbf{w} = 4\pi w^2 dw$) пространстве скоростей $\{\mathbf{w}\} \sim E^3$ принимает вид

$$\nabla_w^{2\beta} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial^\beta}{\partial w^\beta} \left[w^2 \mathcal{D}_w \frac{\partial^\beta}{\partial w^\beta} \right] = \frac{\mathcal{K}}{w^2} \frac{\partial^\beta}{\partial w^\beta} \left[w^{3-2\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial w^\beta} \right]. \quad (9.19)$$

Представление (9.19) аналогично (4.9) с точностью до замен $r \rightarrow w$ и $d_s \rightarrow n = 3$ и включения коэффициента переноса "внутри" оператора $\nabla_w^{2\beta}$. Полагая в (9.19) индекс дифференцирования $\beta \rightarrow 1$, возвращаемся к лапласиану (8.12). Вывод функции распределения $\psi(t, w)$ из кинетического уравнения (8.8) с дробным лапласианом (9.19) мало отличается от известных приемов, применяемых в статистике Леви [92]. При $\alpha \rightarrow 1$ в пределе больших скоростей $w \gg V$ из уравнений (8.8) и (9.19) находим

$$\psi(t, w) \propto \mathcal{K} t \times w^{-\varrho}, \quad (9.20)$$

$$\varrho = 2 + 4\beta, \quad (9.21)$$

где учтено естественное условие нормировки (8.7), а также определение (4.10) радиальной производной $\partial^\beta/\partial w^\beta$ в смысле Римана – Лиувилля. Тот факт, что плотность вероятности $\psi(t, w)$ в (9.20) явно зависит от времени, связан с существенно неравновесным характером динамических процессов, протекающих на стадии бурной релаксации. Как явствует из (9.20) и (9.21), энергетический спектр системы совпадает с (9.11), при этом показатель степени

$$\eta = 1 + 2\beta \quad (9.22)$$

изменяется в пределах от 2 (при $2\beta = 1$) до 3 (при $2\beta \rightarrow 2$) с "характерным" значением $\eta \sim 2,5$. Интервал $2 \leq \eta < 3$ охватывает наблюдаемые спектры *космических лучей* в широком диапазоне энергий [150]. Значение $\eta \sim 2,5$ было ранее получено из модели ускорения частиц на ударных волнах [150]. Ряд альтернативных моделей (включая диффузионное ускорение) рассмотрен в [160]. Соотношение (9.22) для показателя спектра, вытекающее из дробного кинетического уравнения (8.8), можно рассматривать как естественное обобщение частных механизмов ускорения [150, 160] в свете фундаментальных физических процессов, присущих неравновесным динамическим системам с сильной турбулентностью.

10. Фрактальные агрегаты и явления роста

До сих пор, говоря о блужданиях сгустков в конфигурационном пространстве, мы обходили стороной вопрос об их взаимодействии при непосредственных столкновениях. В диссипативных системах столкновения сгустков, обладающих одинаковой полярностью, могут приводить к их ассоциации в конгломераты. Если частота столкновений велика по сравнению с обратным временем диссипации, то первичные (затравочные) конгломераты успевают разрастись в крупномасштабные кластеры, содержащие большое число элементов [79, 161]. Формирование и рост кластеров обусловлены агрегацией сгустков из турбулентного ансамбля частиц и полей; данный процесс может происходить при различных

условиях, что в той или иной степени сказывается на тонкой структуре агрегата [79]. Характерным свойством кластеров, возникающих в процессах агрегации и роста, является их низкая (фрактальная) размерность, зависящая как от геометрии блужданий, так и от деталей взаимодействия [9, 79, 162, 163]. Физика фрактальных агрегатов подробно обсуждалась в обзорах [24, 162] и монографиях [7–9, 163].

По-видимому, явления агрегации и роста лежат в основе формирования крупномасштабных магнитных полей в космической плазме [79]. В качестве примеров приведем возникновение солнечных пятен [161] и групп пятен [164] в фотосфере Солнца, а также неупругое взаимодействие магнитных облаков в солнечном ветре [128] и развитие крупномасштабной фрактальной структуры межпланетного магнитного поля [165]. Из космологических приложений (обсуждение которых, однако, выходит за пределы настоящего обзора) выделим модель происхождения межгалактических магнитных полей за счет спонтанной полимеризации низкочастотных тепловых флуктуаций в эпоху, предшествовавшую рекомбинации вещества во Вселенной [166–169].

10.1. Фрактальные кластеры в фотосфере Солнца

Образование солнечных пятен в фотосфере Солнца связано с агрегацией огромного числа интенсивных силовых трубок одинаковой полярности на затравочных концентрациях магнитного потока — порых, — возникающих в местах стыка супергрануляционных ячеек под действием мелкомасштабных конвективных течений, подталкивающих одноименные полюса друг к другу [170, 171]. Центральные области пятна, формирующие его *тень*, представляют собой плотные скопления трубок, сжатых по бокам силами взаимного притяжения (точнее, силами притяжения продольных электрических токов, отвечающих за полоидальное магнитное поле пятна). Притяжению продольных токов противостоит упругость магнитного поля в трубках, предотвращающая электромагнитный коллапс системы; напряженность магнитного поля в центре пятна достигает при этом значений порядка $(3–4) \times 10^3$ Э. Тень развитого пятна окружена так называемой *полутенью* — состоящим из таких же трубок гало, форма которого напоминает гигантскую актинию с расправленными щупальцами. Схематически строение солнечных пятен показано на рис. 16.

Сложную геометрию гало удастся понять в контексте фрактальной модели солнечных пятен [161], предполагающей баланс объемной энергии агрегата, накопленной в сжатых (из-за действия продольных токов) трубках, и поверхностной энергии фрактальной границы, обладающей — под влиянием полоидального поля — положительным натяжением и дающей сопоставимый с объемным вклад в свободную энергию системы. Экстремуму (минимуму) свободной энергии отвечает хаусдорфова размерность гало [79]

$$d_f = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \frac{\ln(3/8\pi\Delta^2 \ln 2)}{\ln(\xi/a)}, \quad (10.1)$$

где a представляет собой поперечный размер силовой трубки на уровне фотосферы ($\sim 10^2$ км), ξ — радиальный масштаб пятна ($\sim 3 \times 10^4$ км), а величина Δ зависит от параметров функции распределения плазмы. Хаусдорфова

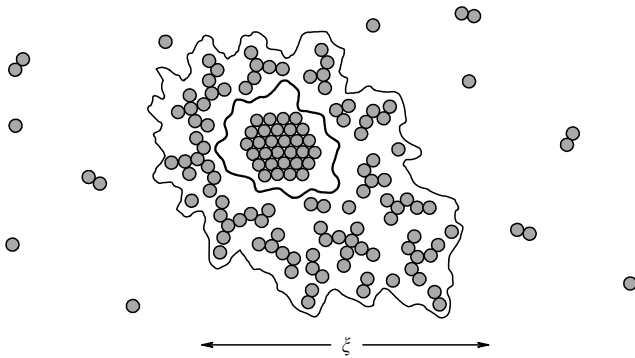


Рис. 16. Строение солнечного пятна. Схематически показаны *тень*, представляющая собой плотные скопления интенсивных силовых трубок одинаковой полярности, и *полутень*, образующая протяженное фрактальное гало вокруг центрального магнитного "ядра". Рост солнечных пятен обусловлен агрегацией интенсивных силовых трубок, осаждающихся на внешней границе полутени.

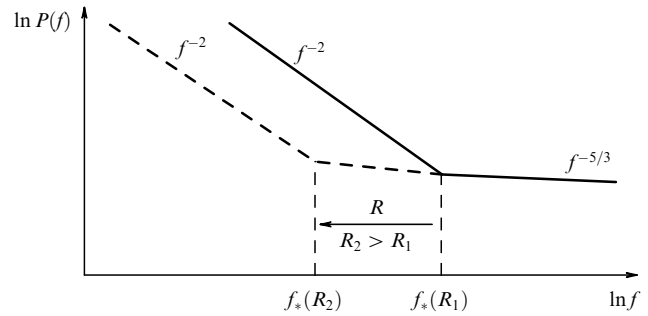


Рис. 17. Цветные шумы в солнечном ветре. В области более низких частот преобладает коричневый шум, напоминающий спектр гауссова временного ряда $\mathcal{I}_{1/2}(t)$. Просветление шумов на более высоких частотах обусловлено процессами самоорганизации, охватывающими все возрастающие пространственно-временные масштабы по мере того, как сгустки турбулентного магнитного поля удаляются от Солнца. Соответственно излом в спектре турбулентности испытывает "коричневое смещение", т.е. сдвигается от "светлых" частот к "темным" с ростом гелиоцентрического расстояния R .

фова размерность (10.1) описывает распределение интенсивных силовых трубок по диску пятна в области полутени. Заметим, что для развитых пятен ($\ln(\xi/a) \gg 1$) хаусдорфова размерность d_f близка к $4/3$:

$$d_f \approx \frac{4}{3}. \tag{10.2}$$

Привлекательность фрактальной модели заключается в том, что она приводит к реалистичным значениям времен образования (~ 10 сут) и жизни ($\sim 2-3$ месяца) пятна [172]. Интересно, что распад пятна можно интерпретировать как фазовый переход второго рода, напоминающий переход через точку Кюри в ферромагнетиках [164]. Экспериментальному исследованию фрактальных структур в фотосфере Солнца посвящена монография [117].

10.2. Цветные шумы в солнечном ветре

Солнечный ветер — непрерывный поток плазмы солнечного происхождения, заполняющий Солнечную систему до гелиоцентрических расстояний $R \sim 10^2$ а.е., — образуется при сверхзвуковом расширении солнечной короны в межпланетное пространство [170, 173]. При температурах в миллионы градусов газодинамическое давление вещества короны столь высоко, что приводит к разгону вышележащих слоев до скоростей порядка $u \sim 300-700$ км s^{-1} в направлении от Солнца [170]. Динамика расширения зависит от ряда факторов, например, топологии магнитного поля в короне. Потоки солнечного ветра, вытекающие из областей с преобладанием радиальной компоненты поля, разгоняются более равномерно и более спокойно, достигая при этом скоростей порядка $u \sim 600-700$ км s^{-1} . Напротив, потоки, захватывающие тангенциальное поле, обладают высокой степенью нерегулярности, а их скорости не превышают $u \sim 350$ км s^{-1} . Как правило, быстрый солнечный ветер формируется над корональными дырами, а медленный — над областями со сложной конфигурацией поля, включающей корональные петли. Крупномасштабные вариации солнечного ветра, обусловленные неоднородным расширением вещества короны вдоль быстрых и медленных потоков, рассматриваются неподвижным наблюдателем как *турбулентность*, параметры которой зависят от гелиоцентрического расстояния R .

Среди важнейших свойств турбулентности солнечного ветра выделим существование цветных шумов со степенным спектром мощности вида (5.17). Цвет шума, как правило, зависит не только от диапазона частот f , но и от гелиоцентрического расстояния R . Действительно, по данным с космических аппаратов IMP-8 и ISEE-3, вблизи орбиты Земли (т.е. при $R \sim 1$ а.е.) спектр крупномасштабных вариаций межпланетного магнитного поля $B(t)$ имеет вид $P(f) \sim f^{-\varpi}$ в диапазоне $f \gtrsim 3 \times 10^{-6}$ Гц, причем значение показателя ϖ меняется при переходе через частоту $f_* \sim 3 \times 10^{-5}$ Гц (рис. 17). В области более низких частот $f \lesssim f_*$ показатель спектра равен $\varpi = 1,92 \pm 0,06$ [174], что соответствует *коричневому шуму* (6.7). Напротив, в области более высоких частот $f \gtrsim f_*$ величина ϖ существенно меньше 2 и близка к $\varpi \approx 5/3$ [174, 175]. Степенные спектры с показателем $\varpi \approx 5/3$ занимают промежуточное положение между *розовым* и *коричневым* шумами, а их появление во многих случаях ассоциируется (причем не всегда законно) со свойствами развитой гидродинамической турбулентности в теории Колмогорова К41 [18]. С увеличением R излом вблизи $f \sim f_*$ смещается в сторону более низких частот, а "колмогоровский" спектр $P(f) \sim f z^{-5/3}$ расширяет свои границы (см. рис. 17). По данным с космического аппарата Voyager-2 на гелиоцентрических расстояниях $R \sim 8,5$ а.е. показатель степенного спектра ϖ по флуктуациям межпланетного магнитного поля равен $\varpi \approx 5/3$ в значительно более широком диапазоне частот $3 \times 10^{-6} \lesssim f \lesssim 5 \times 10^{-2}$ Гц [69]. Существенно, что временные ряды, представляющие результаты непосредственных измерений турбулентных полей и плазмы в солнечном ветре, обладают свойством *статистической самоаффинности* на тех же самых частотах, на которых наблюдатель регистрирует цветные шумы [68, 69, 174, 176–178]. Свойство статистической самоаффинности для флуктуаций межпланетного магнитного поля $B(t)$ вблизи орбиты Земли ($R \sim 1$ а.е.) можно проиллюстрировать временным рядом [54], приведенным на рис. 26.

Самоаффинный характер крупномасштабных вариаций солнечного ветра, определяющий цвет шума на соответствующих частотах, удастся понять в контексте структурной модели, предложенной в [128, 129, 165].

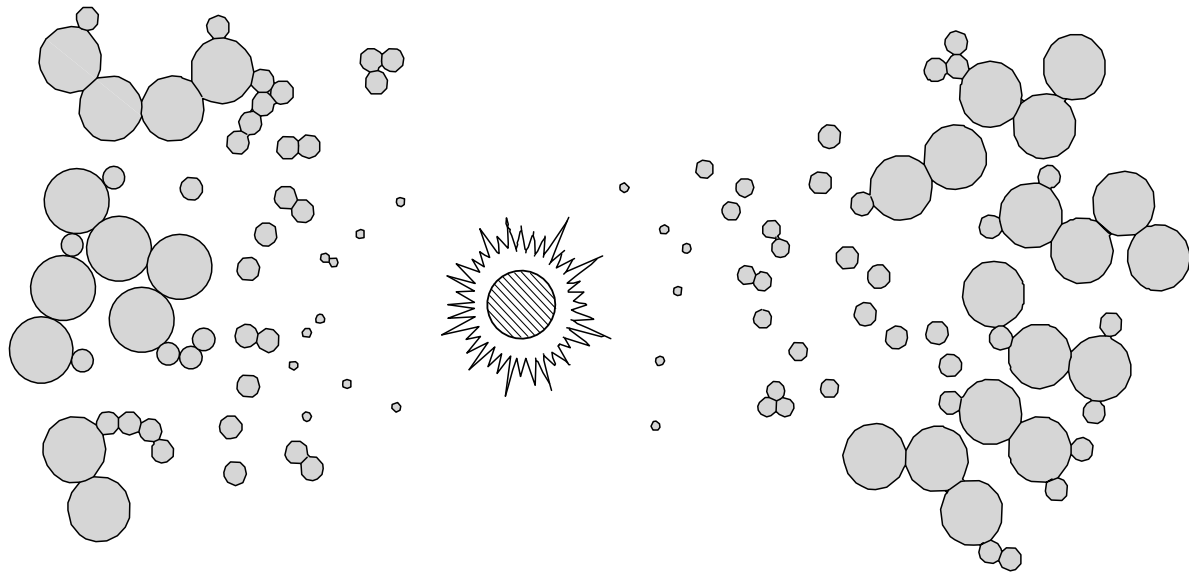


Рис. 18. Агрегация интенсивных силовых трубок межпланетного магнитного поля. Раздувание трубок обусловлено падением газодинамического давления в потоках солнечного ветра при истечении вещества из короны.

Содержание модели заключается в следующем. Межпланетное магнитное поле собрано в элементарные ступки — интенсивные силовые трубки, — замороженные в потоки горячей плазмы коронального происхождения (рис. 18). По мере удаления от Солнца трубки раздуваются и концентрируются в кластеры. Раздувание трубок связано с падением газодинамического давления в потоках солнечного ветра при сферически симметричном истечении вещества из короны. Образование кластеров обусловлено процессами агрегации на стадии, когда трубки раздуваются до соприкосновения друг с другом. При имеющихся начальных и граничных условиях формирование кластеров происходит в интервале гелиоцентрических расстояний от $\sim 0,05$ до ~ 90 а.е. В расширяющейся системе отсчета, замороженной в потоки солнечного ветра, кластеризация поля напоминает развитие солнечных пятен в фотосфере Солнца. Можно утверждать, по аналогии с моделью гало, что кластеры межпланетного магнитного поля обладают фрактальной структурой, а их хаусдорфова размерность d_f определяется выражением (10.1), где отношение ξ/a , вообще говоря, зависит от гелиоцентрического расстояния R . За счет агрегации все возрастающего числа трубок корреляционная длина ξ с ростом R непрерывно увеличивается; при этом второй член в правой части (10.1) стремится к нулю, а фрактальная геометрия кластеров эволюционирует к универсальному распределению с хаусдорфовой размерностью $d_f \approx 4/3$ в согласии с (10.2). Конвекция фрактального распределения с потоками солнечного ветра воспринимается неподвижным наблюдателем как крупномасштабные вариации межпланетного магнитного поля; спектр вариаций имеет степенной вид $P(f) \sim f^{-\varpi}$ с показателем $\varpi = 2d_f - 1$. Ситуация вполне аналогична возникновению цветных шумов в хвосте магнитосферы Земли вследствие конвекции плазмы и поля вдоль долей (см. раздел 6). Из соотношений (5.31) и (10.2) находим

$$\varpi = 2d_f - 1 \approx \frac{5}{3}, \quad (10.3)$$

$$P(f) \sim f^{-5/3}. \quad (10.4)$$

По виду спектр (10.4) совпадает со спектром одномерной изотропной гидродинамической турбулентности в теории Колмогорова K41 [18], однако имеет качественно иную природу: турбулентные структуры заполняют не все доступное объемлющее пространство (как в теории K41), а лишь подпространство низкой размерности, которое подвергается стационарной конвекции. Частота f в (10.4) ограничена снизу обратным временем пролета кластера мимо неподвижного (земного) наблюдателя:

$$f \gtrsim f_* \sim \frac{u}{\xi}, \quad (10.5)$$

где u отвечает радиальной скорости солнечного ветра, а $\xi = \xi(R)$ представляет собой зависящий от гелиоцентрического расстояния линейный размер кластера. Вблизи орбиты Земли ($R \sim 1$ а.е.) $\xi \sim 1 \times 10^7$ км, откуда для медленных потоков $f_* \sim 3 \times 10^{-5}$ Гц [165].

В области более низких частот $f \lesssim f_*$ спектр крупномасштабных флуктуаций $P(f)$ определяется пространственным распределением кластеров в потоках солнечного ветра; данное распределение не искажено эффектами агрегации и несет на себе отпечаток процессов, протекающих в нижних слоях атмосферы Солнца. В первом приближении пространственное распределение кластеров в солнечном ветре можно связать с фрактальной структурой — подтверждаемой магнитограммами высокого разрешения [179] — конвективных течений в фотосфере Солнца, "тасующих" основания трубок на свой лад (рис. 19). Гидродинамическое описание турбулентной конвекции достигается в контексте так называемых " β -моделей" [18], применение которых к процессам, происходящим в фотосфере Солнца, приводит к следующей оценке хаусдорфовой размерности пространственного распределения кластеров в ветре [129]:

$$d_f \approx \frac{3}{2}. \quad (10.6)$$

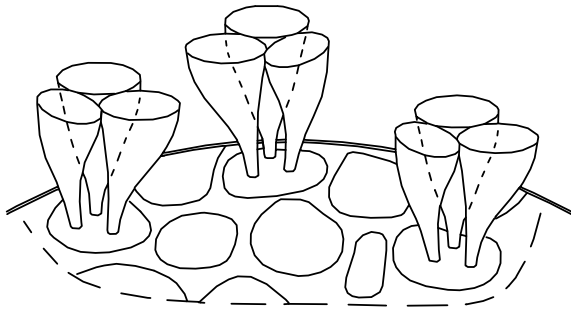


Рис. 19. Основания интенсивных силовых трубок находятся под непрерывным воздействием многомасштабных конвективных течений, образующих иерархические фрактальные структуры в фотосфере Солнца.

Как явствует из (5.31), конвекция β -распределения (10.6) производит *коричневый шум* $P(f) \sim f^{-2}$ на частотах $f \lesssim f_*$.

Суммируя результаты (10.2) и (10.6), отметим, что крупномасштабная структура межпланетного магнитного поля является *бифрактальной*. Под бифрактальным мы понимаем фрактальное распределение, элементы которого сами представляют собой фрактальные множества; при этом размерности элементов и их носителя в общем случае не совпадают. Бифрактальная структура межпланетного магнитного поля схематически показана на рис. 20. Подробное сравнение бифрактальной модели с данными наблюдений можно найти в оригинальных работах [54, 128, 129, 165]. Прямые экспериментальные свидетельства в пользу существования иерархий из магнитных силовых трубок в гелиосферном плазменном слое получены в [180, 181].

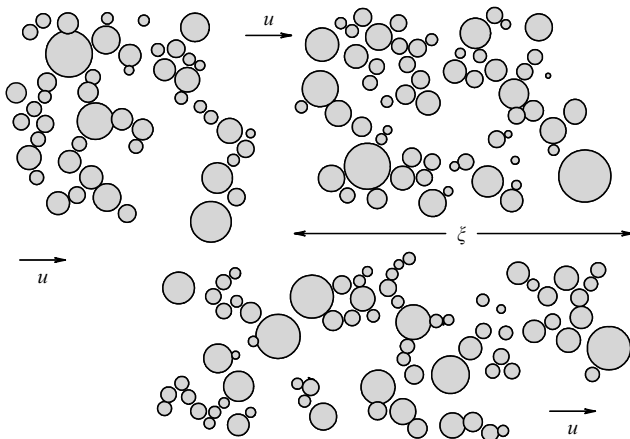


Рис. 20. Бифрактальная структура солнечного ветра. Межпланетное магнитное поле группируется в кластеры, хаусдорфова размерность которых близка к $d_f \approx 4/3$. Данное значение можно объяснить эффектами агрегации с участием большого числа интенсивных силовых трубок. Кластеры, отстоящие друг от друга на расстоянии не менее ξ (при заданном R), в процессах агрегации не участвуют, а их пространственное распределение несет на себе отпечаток процессов, протекающих в нижних слоях атмосферы Солнца. Соответствующее значение хаусдорфовой размерности d_f удается рассчитать на основе " β -моделей": $d_f \approx 3/2$.

11. Фрактонные возбуждения и дробное параболическое уравнение

11.1. Фрактонные возбуждения на фрактальных структурах

Наравне с процессами типа СБФВ, поведение которых никак не ограничено в пространстве, важный класс собственных динамических степеней свободы, согласованных с фрактальной геометрией системы, образуют *фрактонны* [38], локализованные — в определении Андерсона [182] — (квази)акустические возбуждения, отвечающие вибрациям фрактальных доменов. Примерами таких вибраций являются коллективные гармонические ($\sim \exp(i\omega t)$) колебания сгустков турбулентного магнитного поля вокруг некоторого общего положения равновесия (рис. 21). Фрактонным модам соответствует длина волны λ , лежащая в интервале самоподобия $a \lesssim \lambda \lesssim \xi$. В гармоническом приближении фрактонные состояния обладают бесконечным временем жизни [183]. Между тем бегущие возмущения — фононы, — длина волны которых попадает в интервал самоподобия, испытывают сильное рассеяние на пространственных неоднородностях, обусловленных фрактальной геометрией системы; при этом время жизни фононных состояний составляет величину порядка обратной частоты волны, $1/\omega$. Последнее обстоятельство исключает фононы из числа собственных вибрационных возбуждений фрактальной структуры [183]. Заметим, что длина локализации фрактонных мод значительно превосходит длину рассеяния фононов во фрактальных средах [183, 184]. Фрактонны с длиной волны $\lambda \gtrsim \xi$ трансформируются в низкочастотные фононы, для которых фрактал становится прозрачным. По существу фрактонная ветвь подменяет обычные акустические колебания при переходе от регулярной геометрии к фрактальным распределениям.

Статистика фрактонных возбуждений подробно обсуждалась как в оригинальных работах [38, 183, 185], так и в обзорных статьях [37, 186]. Непосредственное наблюдение фрактонных мод в реальных физических системах описано в [184, 187]. Фрактонный механизм образования куперовских пар в сверхпроводящих органических полимерах (таких, как политригексилтиофен

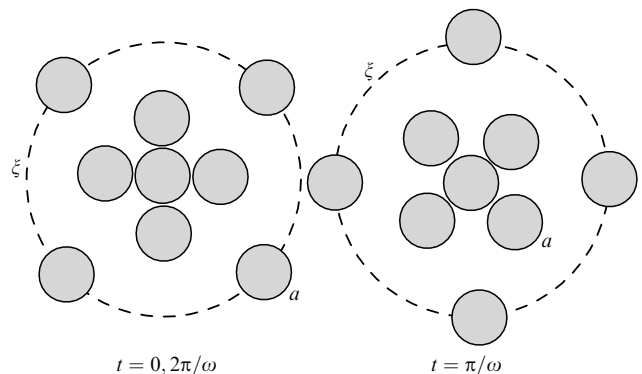


Рис. 21. Фрактонны представляют собой вибрации фрактальных доменов. Примерами являются коллективные гармонические колебания сгустков турбулентного магнитного поля вокруг некоторого общего положения равновесия. Показаны состояния домена, разделенные временным интервалом в одну вторую периода, $\Delta t = \pi/\omega$.

(РЗНТ)) предложен в [43]. "Причастность" фрактонных к явлению высокотемпературной сверхпроводимости в керамических соединениях на основе оксида меди показана в [43, 103]. Нелинейные фрактонные эффекты рассмотрены в [53, 54]; к последним относится, в частности, самосжатие фрактонных мод, а также стабилизация неустойчивости по отношению к самосжатию вследствие дифракционного расплывания фрактонной волновой функции. Явление самосжатия имеет ключевое значение для понимания спектра флуктуаций турбулентного солнечного ветра на промежуточных частотах [53].

11.2. Нелинейное дисперсионное соотношение

Отличительной чертой фрактонных возбуждений является нелинейное дисперсионное соотношение, имеющее степенной вид [37]

$$\omega = Aq^\sigma, \quad (11.1)$$

где показатель степени σ зависит от индекса связности фрактальной структуры [43]:

$$\sigma = \frac{2 + \theta}{2}, \quad (11.2)$$

а волновой вектор q изменяется в пределах от $q_{\min} \sim 2\pi/\xi$ до $q_{\max} \sim 2\pi/a$. Заметим, что значение σ совпадает с параметром d_θ из (2.4),

$$\sigma = d_\theta. \quad (11.3)$$

Величина d_θ имеет смысл точной нижней грани хаусдорфовой размерности геодезических линий, лежащих на фрактальном множестве. Данное обстоятельство отражает *принцип Ферма* в применении к фрактонным модам. Коэффициент

$$A \sim c_* \times \left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{\theta/2} \quad (11.4)$$

определяет фазовую скорость фрактонных

$$c_\sigma(q) \sim c_* \times \left(\frac{q\xi}{2\pi}\right)^{\theta/2} \quad (11.5)$$

в зависимости от волнового вектора q . Фазовая скорость c_σ ограничена сверху значением

$$c_{\sigma \max} \sim c_* \times \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\theta/2}. \quad (11.6)$$

Из соотношений (11.5), (11.6) вытекает, что $c_\sigma \rightarrow c_*$ при $\theta \rightarrow 0$. Величина c_* имеет смысл фазовой скорости низкочастотных звуковых (фононных) колебаний и не зависит от q . Дисперсионное соотношение для фононов является частным случаем (11.1) при $\theta = 0$, а именно $\omega = c_*q$. Низкочастотная фононная ветвь отвечает условию $\omega \lesssim \omega_{\min}$, где $\omega_{\min} \sim c_*q_{\min} \sim 2\pi c_*/\xi$. Фрактонным возбуждениям, напротив, соответствуют частоты

$$\omega_{\min} \lesssim \omega \lesssim \omega_{\min} \times \left(\frac{\xi}{a}\right)^\sigma. \quad (11.7)$$

11.3. Спектральная плотность состояний

Плотность фрактонных состояний изменяется с частотой по степенному закону [185]

$$D_{\text{fr}}(\omega) \propto \omega^{d_s-1}, \quad (11.8)$$

где $d_s = 2d_f/(2 + \theta) = d_f/\sigma$ — спектральная размерность ансамбля — тот же самый топологический параметр, который возникает при описании процессов переноса на самоподобных фрактальных структурах (см. раздел 3). Интересно, что термин *спектральная размерность* обязан своим происхождением именно показателю степени в правой части соотношения (11.8). Зависимость (11.8) согласуется с физическим смыслом величины d_s как эффективного дробного числа степеней свободы на множествах с фрактальной геометрией [23]. Вблизи порога протекания ($d_s = C \approx 1,327 \dots \sim 4/3$), т.е. в установившемся режиме, отвечающем пределу НСС, имеем, с учетом (2.7) и (2.10),

$$D_{\text{fr}}(\omega) \propto \omega^{C-1} \sim \omega^{1/3}, \quad (11.9)$$

где C — константа перколяции. В евклидовом пределе $d_s \rightarrow n$ зависимость (11.8) переходит в плотность фононных состояний [147]

$$D_{\text{ph}}(\omega) \propto \omega^{n-1}. \quad (11.10)$$

Вблизи порога протекания фрактонные состояния ($d_s = C \approx 1,327 \dots \sim 4/3$) существенно плотнее фононных ($d_s = n \geq 2$):

$$D_{\text{fr}}(\omega) \gg D_{\text{ph}}(\omega), \quad (11.11)$$

где $\omega \lesssim \omega_{\min} \times (\xi/a)^\sigma$ в соответствии с условием (11.7). По-видимому, преобладание фрактонных мод над фононными при $T \lesssim \hbar\omega_{\min} \times (\xi/a)^\sigma$ лежит в основе явления сверхпроводимости в материалах с неупорядоченной микроскопической структурой [43, 103].

11.4. Дробное кинетическое уравнение для фрактонных возбуждений

Обратимся теперь к вычислению фрактонной волновой функции $\Psi(t, x)$ в состоянии с частотой ω и волновым вектором q . В гармоническом приближении имеем $\Psi(t, x) = \psi(x) \exp(i\omega t)$, где координата x выбрана в направлении вектора q . Как обычно (см. (3.15) и (8.7)), будем считать, что функции $\Psi(t, x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют естественному условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t, x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (11.12)$$

Заменяя ω и q на операторы дифференцирования $i\partial/\partial t$ и $-i\partial/\partial x$, от дисперсионного соотношения (11.1) приходим к дробному кинетическому уравнению

$$\frac{i\partial\Psi(t, x)}{\partial t} = i^{-\sigma} A \nabla_x^\sigma \Psi(t, x) \quad (11.13)$$

с оператором Рисса–Вейля ∇_x^σ по пространственной переменной x . Порядок интегро-дифференцирования σ определяется из (11.2), (11.3) в соответствии с принципом Ферма. Пространственная составляющая $\psi(x)$ фрактонной волновой функции $\Psi(t, x) = \psi(x) \exp(i\omega t)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\omega\psi(x) = -i^{-\sigma} A \nabla_x^\sigma \psi(x), \quad (11.14)$$

общим решением которого (при четных $\psi(-x) = \psi(x)$) являются *функции Миттага–Леффлера*, приведенные в [100]. Решения в элементарных функциях могут быть получены в следующих предельных случаях (предполагается, что $x \geq 0$).

1. Центральное ядро, $\omega x^\sigma \lesssim \Lambda$.

$$\psi_m(x) \sim \exp\left(-i^\sigma \frac{\omega x^\sigma}{\Lambda \Gamma(1+\sigma)}\right), \quad (11.15)$$

$$\Psi_m(t, x) \sim \exp(i\omega t) \exp\left(-i^\sigma \frac{\omega x^\sigma}{\Lambda \Gamma(1+\sigma)}\right), \quad (11.16)$$

$$|\Psi_m(t, x)|^2 = |\psi_m(x)|^2 \sim \exp\left(-\frac{2\omega \alpha_m x^\sigma}{\Lambda \Gamma(1+\sigma)}\right), \quad (11.17)$$

где $i^\sigma \equiv \cos[\pi\sigma(4m+1)/2] + i \sin[\pi\sigma(4m+1)/2]$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $\alpha_m = \cos[\pi\sigma(4m+1)/2]$ — действительная часть i^σ . Физический смысл имеют лишь те решения, для которых

$$\alpha_m \equiv \text{Re } i^\sigma = \cos\left(\pi\sigma \frac{4m+1}{2}\right) \geq 0. \quad (11.18)$$

При условии (11.18) волновая функция $\Psi_m(t, x)$ принимает конечные значения при всех $-\infty \leq x \leq +\infty$. При $\alpha_m > 0$ профиль пространственной составляющей $\psi_m(x)$ имеет вид дробного экспоненциального распределения: $|\psi_m(x)| \sim \exp[-(x/\lambda_m)^\sigma]$, где $\lambda_m = [\Lambda \Gamma(1+\sigma)/\omega \alpha_m]^{1/\sigma}$. Масштаб λ_m (т.е. характерный размер ядра) определяет длину локализации фрактонных возбуждений. Как следует из (2.7), (2.10) и (2.15), вблизи порога протекания показатель $\sigma = (2+\theta)/2$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{1}{c} \leq \sigma \leq \frac{S_n}{c}, \quad (11.19)$$

где $S_n \equiv \ln(3^n - 1)/\ln 3$ — хаусдорфова размерность канторова сыра в E^n . Заметим, что ограничение сверху на параметр σ зависит от топологической размерности пространства вложения: $2 \leq n \leq 5$. Из условия (11.19) имеем $0,75 \leq \sigma \leq 1,42$ при $n = 2$ и $0,75 \leq \sigma \leq 2,23$ при $n = 3$. В евклидовом пределе $\sigma \rightarrow 1$ действительная часть $\alpha_m \rightarrow 0$ при всех m . Соответственно фрактонная волновая функция $\Psi_m(t, x)$ вырождается в плоскую (фононную) волну: $\Psi_m(t, x) \rightarrow \exp(i\omega t - iqx)$.

Дробное экспоненциальное распределение $|\psi_m(x)| \sim \exp[-(x/\lambda_m)^\sigma]$ для ядра фрактонной волновой функции было впервые предложено в [188]. Большое количество работ, как аналитических, так и численных (см. обзор [37] и цитированную там литературу) было впоследствии положено на алтарь фрактонной динамики с целью определения параметра σ . (В обозначениях [37] $\sigma \equiv d_\phi$.) Замечательно, что почти все результаты [37] хорошо ложатся в интервал (11.19), отражающий фундаментальные топологические свойства фрактальных структур на пороге протекания [43].

2. Хвостовая область, $\omega x^\sigma \gg \Lambda$. Асимптотическое ($\omega x^\sigma \gg \Lambda$) исследование дробного кинетического уравнения (11.14) аналогично выводу распределения Леви из обобщенного оператора Рисса – Вейля [92]. Принимая во внимание условие нормировки (11.12), из (11.14) находим

$$\psi_m(x) \sim \left(\frac{\Lambda}{\omega \Gamma(-\sigma)}\right)^{1/2} \times x^{-(\sigma+1)/2}, \quad (11.20)$$

$$\Psi_m(t, x) \sim \left(\frac{\Lambda}{\omega \Gamma(-\sigma)}\right)^{1/2} \exp(i\omega t) \times x^{-(\sigma+1)/2}, \quad (11.21)$$

$$|\Psi_m(t, x)|^2 = |\psi_m(x)|^2 \sim \frac{\Lambda}{\omega |\Gamma(-\sigma)|} \times x^{-(\sigma+1)}. \quad (11.22)$$

Распределение (11.21), (11.22) представляет собой *степенной хвост* фрактонной волновой функции $\Psi_m(t, x)$. Хвост появляется лишь при дробных значениях σ в силу аналитических свойств оператора Рисса – Вейля [92]. При $\sigma = 1$ (т.е. при связности $\theta = 0$) хвост пропадает за счет расходимости гамма-функции: $\Gamma(-1) = \infty$. Наклон хвоста (в логарифмических координатах) равен $-(\sigma+1)$. В силу (11.19) $1,75 \lesssim (\sigma+1) \lesssim 2,42$ при $n = 2$ и $1,75 \lesssim (\sigma+1) \lesssim 3,23$ при $n = 3$. Относительно медленное ($(\sigma+1) \lesssim 3,5$) затухание фрактонной волновой функции при $x^\sigma \gg \Lambda/\omega$ указывает на большую вероятность нахождения фрактона за пределами центрального ядра [43].

11.5. Самосжатие фрактонных мод и дробное параболическое уравнение

Уравнения (11.13) и (11.14) относятся к "слабым" возбуждениям, для которых зависимостью частоты ω от амплитуды $|\Psi(t, x)|^2$ можно пренебречь. С увеличением интенсивности волны следует учесть нелинейные поправки к частоте; ограничиваясь членом первого порядка малости, положим

$$\omega = \omega_0 - \zeta |\Psi(t, x)|^2, \quad (11.23)$$

где ω_0 соответствует линейному приближению, а второе слагаемое — нелинейной поправкой. Заметим, что ω_0 зависит от волнового числа q по степенному закону (11.1). Не умаляя общности, будем считать, что при всех q параметр $\zeta = \zeta(q)$ принимает положительные значения, $\zeta > 0$, т.е. частота уменьшается с ростом амплитуды (рис. 22). Поскольку амплитуда $|\Psi(t, x)|^2$ убывает с увеличением x — зависимость, обусловленная нелокальностью оператора ∇_x^σ в волновом уравнении (11.13), — то при условии (11.23) фазовая скорость фрактона ω/q будет расти от ядра к хвосту возбуждения. Вместе с тем при

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2} > 0 \quad (11.24)$$

групповая скорость $\partial \omega / \partial q$ будет всякий раз направлена так, чтобы на каждом такте осциллирующей энергии подтекало из хвоста в ядро. В результате профиль фрактона начнет искажаться — колебания в ядре будут усиливаться, а в хвосте ослабевать (рис. 22б). Данный эффект можно рассматривать как самосжатие (или самофокусировку) фрактонного возбуждения. Явление аналогично модуляционной неустойчивости плоского волнового пакета с медленно изменяющимися амплитудой и фазой [189]. Переходя от ω и q к операторам дифференцирования $i\partial/\partial t$ и $-i\partial/\partial x$, из соотношений (11.1) и (11.23) получим нелинейное дробное кинетическое уравнение для неустойчивых фрактонных мод:

$$i\frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t} = i^{-\sigma} \Lambda \nabla_x^\sigma \Psi(t, x) - \zeta |\Psi(t, x)|^2 \Psi(t, x). \quad (11.25)$$

Прогрессирующему самосжатию фрактона противостоит дифракция, вызывающая "расплывание" ядра. Чем уже ядро, тем сильнее дифракционные эффекты. Если среда достаточно упруга, а роль нелинейности ограничена малой поправкой к частоте, то дальнейшее развитие модуляционной неустойчивости подавляется

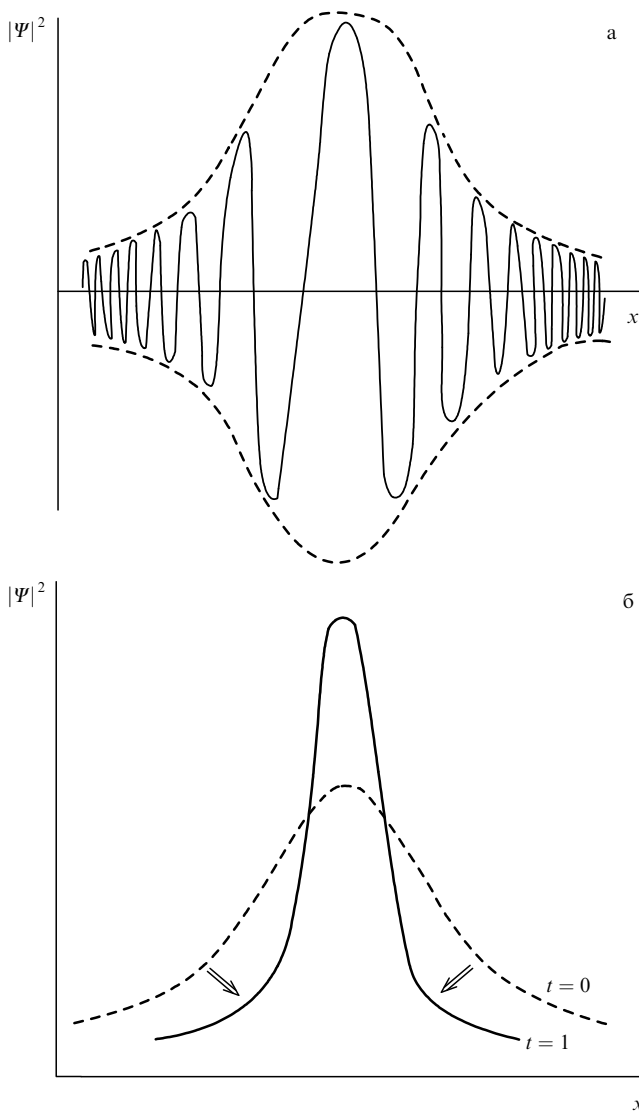


Рис. 22. (а) Основным усредненным нелинейным эффектом, заявляющим о себе по мере усиления фрактонных колебаний, является зависимость частоты возбуждения ω от амплитуды $|\Psi(t, x)|^2$. При $\zeta > 0$ частота колебаний в хвосте превышает соответствующее значение в центральной части фрактона. Огибающая нелинейной фрактонной моды показана штриховой линией. (б) Развитие модуляционной неустойчивости приводит к постепенной перекачке энергии из хвоста в ядро фрактонного возбуждения. Изображено положение огибающей для двух последовательных моментов времени $t = 0$ и $t = 1$. Явление можно рассматривать как самофокусировку (или самосжатие) нелинейной фрактонной моды.

дифракцией. Как правило, с дифракцией отождествляют член, пропорциональный второй производной $\nabla_x^2 \Psi(t, x)$; при этом коэффициент пропорциональности равен половине от $\partial^2 \omega / \partial q^2$ [189]:

$$\text{d.t.} \sim \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2} \right] \times \nabla_x^2 \Psi(t, x) \quad (11.26)$$

(d.t. — diffraction term). Результат (11.26) характеризует дифракцию как "диффузию" колебаний с коэффициентом $D \sim \partial^2 \omega / 2 \partial q^2$.

В контексте кинетического уравнения (4.1) уместно ввести представление о "странной дифракции", отвечающей дробному обобщению (11.26) с оператором Рисса —

Вейля $\nabla_{-x}^\beta \nabla_x^\beta$ вместо ∇_x^2 :

$$\text{d.t.} \sim \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2} \right] q^{2-2\beta} \times \nabla_{-x}^\beta \nabla_x^\beta \Psi(t, x), \quad (11.27)$$

где индекс β изменяется в пределах от 0 до 1, а множитель $q^{2-2\beta}$ поставлен для сохранения общей размерности. Оператор $\nabla_{-x}^\beta \nabla_x^\beta$ в (11.27) обеспечивает необходимую инвариантность дифракционного члена относительно зеркальной симметрии $x \rightarrow -x$. Переход к оператору Рисса — Вейля в уравнении (11.27) можно связать с нелокальностью дифракционных эффектов в средах с фрактальной геометрией. Физическим проявлением нелокальности служит странное — недиффузионное — расплывание центрального ядра по мере развития модуляционной неустойчивости. Странной дифракции отвечает "коэффициент турбулентного переноса" $D_\beta \sim [\partial^2 \omega / \partial q^2] q^{2-2\beta} / 2$. Баланс дифракции и нелинейности, и притом с учетом нелокальных явлений, соответствует дробному кинетическому уравнению (11.25) с добавлением интегро-дифференциального члена (11.27), описывающего странную ("турбулентную") диффузию фрактонных возбуждений:

$$\frac{i \partial \Psi(t, x)}{\partial t} = i^{-\sigma} A \nabla_x^\sigma \Psi(t, x) + D_\beta \nabla_{-x}^\beta \nabla_x^\beta \Psi(t, x) - \zeta |\Psi(t, x)|^2 \Psi(t, x). \quad (11.28)$$

Стабилизирующая роль дифракции приводит к существованию стационарных самосжатых фрактонных мод — результат, вполне аналогичный известным принципам нелинейной оптики [189]. Уравнение (11.28) представляет собой не что иное, как дробное обобщение *параболического уравнения*, описывающего самофокусировку и самосжатие волновых пакетов в нелинейных средах [189]. Локальным пределом кинетического уравнения (11.28) являются условия $\sigma \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow 1$. Важным аргументом в пользу дробного уравнения (11.28) является нелокальность — подтверждаемая непосредственными измерениями — так называемых электрострикционного и теплового эффектов, обычно сопутствующих распространению нелинейных волн в диэлектрических материалах [190].

11.6. Самоделокализация фрактонных и дробное нелинейное уравнение Шрёдингера

До сих пор мы считали, что возбуждение волн не влияет на топологические свойства среды, например, на ее связность. С изменением связности в поле волны может быть соотнесен интересный эффект *самоделокализации* фрактонных, который мы рассматриваем в качестве теоретического предсказания фрактальной модели. Суть эффекта заключается в следующем. Нелинейная зависимость частоты фрактона от амплитуды приводит к изменению фазы осцилляций от ядра к хвосту возбуждения. С течением времени начальные фазовые неоднородности нарастают, и в какой-то момент фрактон "распадается" на осцилляторы, фазы которых в значительной степени перемешаны. Фазовое перемешивание отражается на взаимном расположении структурных элементов фрактала, участвующих в колебаниях. При этом нарушается отношение элементов как ближайших соседей: первоначально близкие элементы могут разойтись в поле волны, а далекие сблизиться. Данное

обстоятельство существенно для определения параметра связности θ , фиксирующего направления кратчайших "тропинок" (геодезических линий, соединяющих структурные элементы множества) по микроскопическим "приметам" фрактальной среды (например, по форме пустот — см. раздел 2). При сильном перемешивании "приметы" пропадают, а индекс θ обращается в нуль:

$$\theta \rightarrow 0. \quad (11.29)$$

При нулевой связности снимаются условия, требующие локализации возбуждений, и фрактон обретает долгожданную свободу. Волна как бы создает себе нечто вроде коридора с евклидовой связностью, вдоль которого она беспрепятственно проходит сквозь среду. Явление можно рассматривать как "странный солитон", для которого фрактальное распределение оказывается прозрачным. Кинетическое уравнение, описывающее странные солитоны, легко получить из дробного параболического уравнения (11.28) в пределе

$$\sigma \rightarrow 1, \quad (11.30)$$

где мы учли соотношение (11.2) для фрактонных мод. При этом индекс β , отвечающий за общую пространственную нелокальность волнового процесса, следует по-прежнему считать дробным:

$$\frac{i\partial\Psi(t, x)}{\partial t} + i\Lambda\nabla_x\Psi(t, x) = \mathcal{D}_\beta\nabla_{-x}^\beta\nabla_x^\beta\Psi(t, x) - \zeta|\Psi(t, x)|^2\Psi(t, x). \quad (11.31)$$

Преобразованием времени $2t' = t + x/\Lambda$ уравнение (11.31) сводится к *дробному нелинейному уравнению Шрёдингера*

$$\frac{i\partial\Psi(t', x)}{\partial t'} - \mathcal{D}_\beta\nabla_{-x}^\beta\nabla_x^\beta\Psi(t', x) + \zeta|\Psi(t', x)|^2\Psi(t', x) = 0 \quad (11.32)$$

с нелокальным оператором $\nabla_{-x}^\beta\nabla_x^\beta$. Дробное нелинейное уравнение Шрёдингера описывает странные солитоны огибающих в средах со сложной микроскопической структурой, фрактальный "узор" которой может меняться под действием возмущения. Локальным пределом ($\beta \rightarrow 1$) уравнения (11.32) является стандартное нелинейное уравнение Шрёдингера, рассмотренное в [191]. Полагая $\Psi(t', x) = \psi(x) \exp(-i\omega t')$ в (11.32), приходим к уравнению огибающей

$$-\mathcal{D}_\beta\nabla_{-x}^\beta\nabla_x^\beta\psi(x) + \omega\psi(x) + \zeta|\psi(x)|^2\psi(x) = 0. \quad (11.33)$$

В отличие от уравнения (11.14), содержащего комплексный множитель $-i^{-\sigma}\Lambda$ перед оператором Рисса–Вейля ∇_x^σ , коэффициент $\mathcal{D}_\beta \sim [\partial^2\omega/\partial q^2] q^{2-2\beta}/2$ перед нелокальным членом $\nabla_{-x}^\beta\nabla_x^\beta\psi(x)$ в (11.33) принимает строго действительные значения.

11.7. Дробное уравнение Гинзбурга–Ландау

Перейдем к рассмотрению волновых полей, устойчивых относительно самосжатия. Ввиду условия (11.24) нам достаточно изменить знак нелокального члена в уравнениях (11.32) и (11.33). В качестве определяющего

уравнения для амплитуды $\psi(x)$ получим

$$\mathcal{D}_\beta\nabla_{-x}^\beta\nabla_x^\beta\psi(x) + \omega\psi(x) + \zeta|\psi(x)|^2\psi(x) = 0. \quad (11.34)$$

Локальным пределом ($\beta \rightarrow 1$) уравнения (11.34) является *уравнение Гинзбурга–Ландау*

$$-\mathcal{D}\nabla_x^2\psi(x) + \omega\psi(x) + \zeta|\psi(x)|^2\psi(x) = 0, \quad (11.35)$$

играющее ключевую роль в теории фазовых переходов второго рода [192]. Интегро-дифференциальное уравнение (11.34) с оператором $\nabla_{-x}^\beta\nabla_x^\beta$ будем называть *дробным уравнением Гинзбурга–Ландау*. В контексте дробного уравнения (11.34) величину $\psi(x)$ можно рассматривать как *параметр порядка*, описывающий когерентное формирование нелинейного волнового поля — например, конденсатной волновой функции ниже точки перехода в сверхпроводящее состояние [104] — под влиянием дальнедействующих корреляционных эффектов, вносящих существенный фактор нелокальности в поведение системы как целого. Нелокальность в данном случае можно связать с макроскопическим упорядочением, отражающимся на кинетике волнового процесса. В качестве иллюстрации приведем получившее широкий резонанс понятие "страйпов" — одномерных упорядоченных распределений заряда (charge stripes) и спина (spin stripes), образующих — в сверхпроводящих керамиках — своего рода "беговые дорожки", вдоль которых конденсатная проводящая жидкость может течь без сопротивления [193–195]. При высоких температурах носителями сверхпроводящего тока в керамиках могут быть спаренные на колебаниях "страйпов" дырки [43], возникающие за счет оттягивания электронов проводимости в изолирующие прослойки, лежащие между проводящими плоскостями [195].

Дробное уравнение Гинзбурга–Ландау можно получить формально из условия экстремума свободной энергии [104]

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\mathcal{D}_\beta|\nabla_x^\beta\psi|^2 + \omega|\psi|^2 + \frac{\zeta}{2}|\psi|^4 \right] \quad (11.36)$$

с нелокальным градиентным членом $\mathcal{D}_\beta|\nabla_x^\beta\psi|^2$. Функционал (11.36) обобщает известное из теории Ландау [192] разложение свободной энергии \mathcal{F} на случай произвольных действительных значений $0 \leq \beta \leq 1$. Введение операции дробного дифференцирования в разложение (11.36) соответствует негауссову распределению параметра порядка ψ со степенным коррелятором плотности [104]

$$\mathfrak{S}(x) = \frac{\mathfrak{S}_0}{\Gamma(1-\beta)} \times x^{-\beta}. \quad (11.37)$$

Выражение (11.37) означает, что островки "симметричной" (сверхпроводящей) фазы, отвечающей ненулевым значениям параметра порядка ψ , рождаются вблизи точки перехода не случайно (как в обычной теории Ландау), а некоторым когерентным образом — так, что вероятность найти островок на расстоянии x от исходного убывает с x как $x^{-\beta}$ (при гауссовом распределении как $\exp(-x^2)$). При варьировании свободной энергии \mathcal{F} комплексно-сопряженные поля ψ и ψ^* следует считать независимыми — данный прием повторяет вывод обычного уравнения Гинзбурга–Ландау, описанный в [192].

Варьируя (11.36) по ψ^* , получим

$$\delta\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{ D_\beta \nabla_x^\beta \psi \nabla_x^\beta \delta\psi^* + \omega \psi \delta\psi^* + \zeta |\psi|^2 \psi \delta\psi^* \}. \quad (11.38)$$

Интегрируя нелокальный член $\nabla_x^\beta \psi \nabla_x^\beta \delta\psi^*$ по частям с помощью известной формулы [100, 107]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi_1(y) \nabla_y^\beta \varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi_2(y) \nabla_{-y}^\beta \varphi_1(y), \quad (11.39)$$

преобразуем (11.38) к виду

$$\delta\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{ D_\beta \nabla_{-x}^\beta \nabla_x^\beta \psi + \omega \psi + \zeta |\psi|^2 \psi \} \delta\psi^*. \quad (11.40)$$

Полагая в точке экстремума $\delta\mathcal{F} = 0$, приходим к дробному уравнению Гинзбурга–Ландау в форме (11.34). Решением дробного уравнения Гинзбурга–Ландау при $\zeta = 0$ является — в пределе больших $|x|$ — уже знакомое нам *распределение Леви*, введенное в контексте кинетического уравнения (4.1). В самом деле, используя явное интегро-дифференциальное представление (4.5) для оператора Рисса–Вейля ∇_x^β , а также принимая во внимание естественное условие нормировки (11.12), из дробного уравнения Гинзбурга–Ландау (11.34) находим

$$\psi(x)|_{\zeta=0} \propto \frac{1}{|x|^{1+2\beta}}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (11.41)$$

Вывод дробного уравнения Гинзбурга–Ландау из условия экстремума свободной энергии раскрывает методы странной кинетики в свете фундаментальных вариационных принципов, лежащих в основе всей современной теоретической физики. Приложения дробного уравнения Гинзбурга–Ландау возвращают нас к модели *высокотемпературной сверхпроводимости* [104], согласно которой конденсатная волновая функция $\psi(x)$ может приобрести необходимый "запас прочности" за счет нелокальных симметрий, "удерживающих" квантовую жидкость в сверхпроводящем состоянии. При этом баланс нелинейности ($\zeta |\psi|^2 \psi$) и нелокальности ($D_\beta \nabla_{-x}^\beta \nabla_x^\beta \psi$) в уравнении (11.34) обеспечивает — при характерных значениях корреляционной длины $a \sim 10^{-6}$ см и энергии на поверхности Ферми $\varepsilon_F \sim 3$ эВ — устойчивость сверхпроводящей фазы при абсолютных температурах порядка $T_c \sim 180$ К [104].

11.8. Топологическое нелинейное "затухание Ландау" и постоянная протекания

Эффект самоделокализации связан с "упругим" изменением связности в поле волны. Солитон бежит по дорожке, вдоль которой возбуждение как бы "подминает" под себя пространственные неоднородности среды. За фронтом волны фрактальность восстанавливается, т.е. прохождение импульса не несет необратимых последствий для среды как таковой. Ситуация кардинально меняется, если взаимодействие фрактонов со средой носит неупругий характер. Действительно, по принципу Ле Шателье отклик среды будет в этом случае направлен на подавление фрактонных возбуждений. Следствием такого положения дел является структурная перестройка среды в сторону некоторого "резонансного"

распределения, на котором фрактоны испытывают сильное рассеяние, — наблюдается нечто вроде топологического "затухания Ландау", обусловленного потерями энергии на перераспределение элементов фрактального множества под действием собственных (квази)акустических колебаний.

Предположим, что результатом структурной перестройки среды в поле фрактонного возбуждения является новое перколирующее фрактальное множество F , топология которого определяется значениями хаусдорфовой размерности d_f и индекса связности θ . Будем считать, что под действием ансамбля волн система переходит к некоторому НСС, тогда для d_f и θ можно записать условие (2.10) в соответствии с теоремой об универсальном значении. Если амплитуда волн достаточно велика, то вывод о фазовом перемешивании (11.29) остается в силе: $\theta \rightarrow 0$. Как следует из уравнений (11.15)–(11.17) и (11.20)–(11.22), фрактонная волновая функция в этом случае вырождается в плоскую волну: $\Psi_m(t, x) \propto \exp(i\omega t - iqx)$. С другой стороны, если топологическая диссипация в целом "сильнее" нелинейности, то плоские волны, образовавшиеся в результате распада фрактонного возбуждения, попросту не успевают сгруппироваться в солитон. Поскольку решения вида $\Psi_m(t, x) \propto \exp(i\omega t - iqx)$ не являются собственными модами фрактального распределения [183], то все излучение за короткое время (порядка $1/\omega$) будет рассеяно на пространственных неоднородностях среды. Комбинируя (2.7) и (2.10), из условия $\theta \rightarrow 0$ получим хаусдорфову размерность множества, "резонирующего" с фрактонными возбуждениями:

$$d_f \rightarrow C \approx 1,327 \dots \sim \frac{4}{3}. \quad (11.42)$$

Полученное значение совпадает с *постоянной протекания* C — красивый аналитический результат! С необычными свойствами распределения (11.42) мы уже встречались в разделе 3 при исследовании явления негауссовой диффузии. В контексте волновых процессов распределение (11.42) выступает в роли "диссипативного аттрактора", на котором фрактонные возбуждения затухают за время порядка обратной частоты колебаний.

11.9. Фрактонная модель солнечного ветра

Механизм топологического "затухания Ландау" можно соотнести с формированием фрактальной структуры межпланетного магнитного поля под действием фрактонных возбуждений, имеющих магнитозвуковую природу. Речь в данном случае идет о возможности такого коллективного перераспределения сгустков турбулентного магнитного поля, которое позволяет погасить колебания, возникающие в потоках солнечного ветра на ранних стадиях истечения вещества из короны [52–54]. Результатом структурной перестройки поля, "резонирующего" с фрактонами, является образование кластеров, хаусдорфова размерность d_f которых близка к (11.42). Значение $d_f \sim 4/3$ адекватно предсказанию агрегационной модели [128, 129, 165] об эволюции фрактальной геометрии кластеров к универсальному распределению с хаусдорфовой размерностью (10.2).

Напомним, что конвекция фрактального распределения с радиальными потоками солнечного ветра рассматривается неподвижным наблюдателем как самоаффинные вариации поля во времени. Показатель степенного

спектра для распределения (11.42) легко получить из формулы (5.31):

$$\varpi = 2C - 1 \approx 1,65 \dots \sim \frac{5}{3}. \quad (11.43)$$

Соответственно спектр флуктуаций $P(f)$ имеет вид

$$P(f) \sim f^{-5/3}, \quad (11.44)$$

возвращающий нас к (10.4). За счет включения волновых процессов фрактальная модель предсказывает появление "колмогоровских" спектров вида (11.44) на меньших гелиоцентрических расстояниях, чем в "чистых" агрегационных моделях [128, 129, 165]. Данный результат согласуется с наблюдаемыми свойствами турбулентного солнечного ветра на гелиоцентрических расстояниях $R \sim 0,3$ а.е. [178]. Величина f в (11.44) испытывает доплеровское уширение, допускающее небольшую "размазку" по частоте:

$$f \gtrsim f_* \sim \frac{|u \pm c_\sigma|}{\xi}, \quad (11.45)$$

где u определяет скорость конвективного переноса. Считая параметр u большим по сравнению с фазовой скоростью фрактон c_σ , из неравенства (11.45) приходим к оценке (10.5).

12. Заключение

Мы обсудили нетрадиционный аналитический подход к исследованию сильной турбулентности в сложных нелинейных динамических системах вдали от теплового равновесия. В основе предлагаемого подхода лежит синтез дробной динамики и фрактальной топологии, двух нестандартных математических методов, отражающих парадигмы современной теории турбулентности и хаоса. Объединение указанных методов позволяет связать воедино кинетические и геометрические характеристики турбулентного ансамбля, что открывает путь к самосогласованному описанию его важнейших статистических свойств. Связующим звеном между топологией и кинетикой выступает представление о неравновесном (квази)стационарном состоянии турбулентной системы, устойчивость которого (как структурная, так и динамическая) достигается за счет многомасштабных корреляций в пространстве и во времени. Переход к НСС является сложным компромиссом между механизмами самоорганизации, определяющими тенденции эволюционных процессов в системе, и эффектами динамической релаксации, отражающими роль диссипативных факторов в среде. Топология НСС суть перколирующее (бесконечное линейно связанное) фрактальное множество, лежащее "на пороге протекания" (т.е. в критической точке, ниже которой динамические процессы в среде ограничены конечной областью фазового пространства). С существованием порога связан целый ряд замечательных свойств неравновесных (квази)стационарных состояний турбулентного ансамбля, выражением которых служит универсальная константа — постоянная протекания C — приблизительно равная $1,327 \dots$.

В контексте теории турбулентности постоянную протекания $C \approx 1,327 \dots$ можно рассматривать как универсальное значение спектральной размерности НСС.

Зная спектральную размерность, мы владеем двумя третями полезной информации о кинетике турбулентного ансамбля (треть информации заложена в значении хаусдорфовой размерности, своей для каждой системы). Важно подчеркнуть, что величина $C \approx 1,327 \dots$ автоматически учитывает вклад от многомасштабных корреляций, играющих доминирующую роль в формировании НСС. Исследование корреляций иными методами — например, непосредственно из микроскопических уравнений движения отдельных частиц — сопряжено, как правило, со значительными аналитическими трудностями; в этой связи введение постоянной протекания существенно расширяет возможности аналитического описания турбулентности.

Среди общих (не зависящих от физической природы) свойств НСС отметим стремление к *самоорганизованной критичности*. Как известно, переход системы к СОК сопровождается появлением характерного розового шума $\sim f^{-1}$ на низких частотах. Феномен СОК удается понять в контексте фундаментальных физических принципов — таких, как *принцип наименьшего действия*. С увеличением частоты шумы темнеют, что связано с возрастающим влиянием структурных свойств турбулентности на распределение энергии по спектру. Цвет шума на промежуточных частотах целиком определяется значением хаусдорфовой размерности ансамбля, а различие спектров по цвету обусловлено спецификой физических процессов, управляющих формированием НСС. При больших значениях плазменного параметра β низкочастотный розовый шум $\sim f^{-1}$ указывает на существование странных процессов Ферми в системе. Странное ускорение Ферми приводит к появлению популяций горячих частиц, распределение которых по энергиям отвечает степенному закону $\propto E^{-\eta}$ с показателем $6 \leq \eta < 7$. Полученный результат хорошо согласуется с известными феноменологическими распределениями для высокоэнергетических заряженных частиц в хвосте магнитосферы Земли.

Авторы выражают искреннюю признательность российским и иностранным коллегам — П. Велтри, И.С. Веселовскому, А.А. Галееву, А. Греко, Г.М. Заславскому, Г.Н. Застенкеру, Г. Зимбардо, Дж. Консолини, Ф. Кьяраваллоти, М. Лонгано, Э.И. Могилюскому, А.И. Нейштадту, А.А. Петруковичу, Х. Пешели, Й.И. Расмуссену, К. Рыпдалу, А.Л. Тактакишвили и В.Ю. Трахтенгерцу — за многочисленные обсуждения изложенных в обзоре результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-02-16967), Ассоциации ИНТАС (проект 03-51-3738), а также гранта Минпромнауки НШ-1739.2003.2.

13. Приложение.

Список часто используемых обозначений и сокращений

E^n — n -мерное евклидово пространство,
 F — фрактальное подмножество пространства E^n ,
 d_f — хаусдорфова фрактальная размерность,
 d_s — спектральная фрактальная размерность,
 d_θ — хаусдорфова размерность геодезических линий,
 d_w — фрактальная размерность динамических траекторий,

θ — индекс связности фрактальной структуры,
 C — постоянная протекания (константа перколяции),
 Γ — гамма-функция Эйлера,
 S_n — хаусдорфова размерность n -мерного канторова сыра в E^n ,
 $O(t)$ — коррелятор прошлых и будущих приращений флуктуирующей величины,
 $\mathcal{I}_S(t)$ — статистически самоаффинный временной ряд,
 δ_f — хаусдорфова размерность временного ряда,
 S — показатель подобия,
 J — дополнение S до 1,
 H — показатель процесса переноса (наравне с $\mu = 2H$),
 \mathcal{E}_f — топологическая энтропия,
 α — индекс дробного дифференцирования по времени,
 β — индекс дробного дифференцирования по фазовой переменной,
 D — коэффициент турбулентного переноса,
 Ω — телесный угол,
 P — преобразование Фурье,
 ϖ — показатель степенного спектра мощности,
 ξ — корреляционная длина для фрактального распределения,
 a — элементарный размер флуктуаций турбулентного поля,
 НСС — неравновесное (квази)стационарное состояние.
 СБФВ — случайные блуждания во фрактальном времени,
 СОК — самоорганизованная критичность,
 а.е. — астрономическая единица (расстояние от Земли до Солнца, 1 а.е. = $1,5 \times 10^{13}$ см).

Список литературы

- Hausdorff F *Math. Ann.* **79** 157 (1919)
- Besicovitch A S *Math. Ann.* **101** 161 (1929)
- Besicovitch A S *J. London Math. Soc.* **9** 126 (1934)
- Besicovitch A S *Math. Ann.* **110** 321 (1935)
- Good I J *Proc. Camb. Philos. Soc.* **37** 199 (1941)
- Mandelbrot B B *Science* **155** 636 (1967)
- Mandelbrot B B *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (San Francisco: W.H. Freeman, 1977)
- Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: W.H. Freeman, 1982) [Мандельброт Б *Фрактальная геометрия природы* (М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2001)]
- Feder J *Fractals* (New York: Plenum Press, 1988) [Федер Е *Фракталы* (М.: Мир, 1991)]
- McCaughey J L *Phys. Rep.* **189** 225 (1990)
- Paladin G, Vulpiani A *Phys. Rep.* **156** 147 (1987)
- Peebles P J E *Physica D* **38** 273 (1989)
- Coleman P H, Pietronero L *Phys. Rep.* **213** 311 (1992)
- Labini S F, Montuori M, Pietronero L *Phys. Rep.* **293** 61 (1998)
- Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988)
- Crownover R M *Introduction to Fractals and Chaos* (Boston: Jones and Bartlett, 1995) [Кроновер Р М *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории* (М.: Постмаркет, 2000)]
- Sreenivasan K R, Prasad R R C *Physica D* **38** 322 (1986)
- Frisch U *Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Фриш У *Турбулентность. Наследие Колмогорова* (М.: ФАЗИС, 1998)]
- Gefen Y, Mandelbrot B B, Aharony A *Phys. Rev. Lett.* **45** 855 (1980)
- Suzuki M *Prog. Theor. Phys.* **69** 65 (1983)
- Havlin S, ben-Avraham D *Adv. Phys.* **36** 695 (1987)
- ben-Avraham D, Havlin S *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
- Bouchaud J-P, Georges A *Phys. Rep.* **195** 127 (1990)
- Aharony A, Feder J (Eds) *Fractals in Physics: Essays in Honour of Benoit B. Mandelbrot: Proc of the Intern. Conf. Honouring Benoit B. Mandelbrot on His 65th Birthday, Vence, France, 1–4 October 1989* (Amsterdam: North-Holland, 1990)
- Фракталы в физике* (Под ред. Л Пьетронеро, Э Тозатти) (М.: Мир, 1988)
- Takayasu H *Fractals in the Physical Sciences* (Manchester: Manchester Univ. Press, 1990)
- Le Méhauté A *Fractal Geometries: Theory and Applications* (Boca Raton: CRC Press, 1991)
- Schroeder M R *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise* (New York: W.H. Freeman, 1991) [Шредер М *Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая* (Ижевск: РХД, 2001)]
- Морозов А Д *Введение в теорию фракталов* (М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002)
- Божокин С В, Паршин Д А *Фракталы и мультифракталы* (Ижевск: РХД, 2001)
- Шкловский Б И, Эфрос А А *Электронные свойства легированных полупроводников* (М.: Наука, 1979) [Shklovskii B I, Efros A L *Electronic Properties of Doped Semiconductors* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)]
- Stauffer D *Introduction to Percolation Theory* (London: Taylor & Francis, 1985)
- Stauffer D, Aharony A *Introduction to Percolation Theory* 2nd ed. (London: Taylor & Francis, 1992)
- Shante V K S, Kirkpatrick S *Adv. Phys.* **20** 325 (1971)
- Stauffer D *Phys. Rep.* **54** 1 (1979)
- Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
- Nakayama T, Yakubo K, Orbach R L *Rev. Mod. Phys.* **66** 381 (1994)
- Alexander S, Orbach R L *J. Phys. Lett. (Paris)* **43** L625 (1982)
- Coniglio A J *Phys. A: Math. Gen.* **15** 3829 (1982)
- Milovanov A V *Phys. Rev. E* **56** 2437 (1997)
- Milovanov A V, Zimbardo G *Phys. Rev. E* **62** 250 (2000)
- Milovanov A V, Rasmussen J J *Phys. Rev. B* **64** 212203 (2001)
- Milovanov A V, Rasmussen J J *Phys. Rev. B* **66** 134505 (2002)
- Дубровин Б А, Новиков С П, Фоменко А Т *Современная геометрия* (М.: Наука, 1979)
- Hirsch M W *Differential Topology* (New York: Springer-Verlag, 1976) [Хирш М *Дифференциальная топология* (М.: Мир, 1979)]
- Фоменко А Т, Фукс Д Б *Курс гомотопической топологии* (М.: Наука, 1989)
- Milovanov A V et al. *J. Geophys. Res.* **106** 6291 (2001)
- Rypdal K et al. *Nonlinear Process. Proc. Geophys.* **10** 139 (2003)
- Milovanov A V, Zelenyi L M, Zimbardo G *J. Geophys. Res.* **101** 19903 (1996)
- Zelenyi L M, Milovanov A V, Zimbardo G, in *New Perspectives on the Earth's Magnetotail* (Geophys. Monograph, Vol. 105, Eds A Nishida, D N Baker, S W H Cowley) (Washington, DC: Am. Geophys. Union, 1998) p. 321
- Milovanov A V et al. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* **63** 705 (2001)
- Milovanov A V, Zelenyi L M *Phys. Space Plasmas* **14** 373 (1995)
- Зеленый Л М, Милованов А В *Геомагнетизм и астрономия* **37** (1) 1 (1997)
- Milovanov A V, Zelenyi L M *Astrophys. Space Sci.* **264** 317 (1998)
- Tetreault D *J. Geophys. Res.* **97** 8531 (1992)
- Tetreault D *J. Geophys. Res.* **97** 8541 (1992)
- Treumann R A *Phys. Scripta* **59** 19 (1999)
- Treumann R A *Phys. Scripta* **59** 204 (1999)
- Gefen Y, Aharony A, Alexander S *Phys. Rev. Lett.* **50** 77 (1983)
- O'Shaughnessy B, Procaccia I *Phys. Rev. Lett.* **54** 455 (1985)
- O'Shaughnessy B, Procaccia I *Phys. Rev. A* **32** 3073 (1985)
- Giona M, Roman H E *Physica A* **185** 87 (1992)
- Zaslavsky G M et al. *Phys. Plasmas* **7** 3691 (2000)
- Chiaravalloti F, Milovanov A V, Zimbardo G *Phys. Scripta* (to be published) (2004); arxiv: cond-mat/0404648 v1 27 Apr. 2004
- Clement E, Kopelman R, Sander L M *J. Stat. Phys.* **65** 919 (1991)
- La Porta A et al. *Nature* **409** 1017 (2001)
- Колмогоров А Н *ДАН СССР* **119** 861 (1958)
- Милованов А В и др. *Космич. исслед.* **34** 451 (1996)
- Burlaga L F, Klein L W *J. Geophys. Res.* **91** 347 (1986)

70. Милованов А В, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (М.: Институт космических исследований, 2003)
71. Болтянский В Г, Ефремович В А *Наглядная топология* (М.: Наука, 1983)
72. van Kampen N G *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: North-Holland, 1981) [Ван Кампен Н Г *Стохастические процессы в физике и химии* (М.: Высшая школа, 1990)]
73. Carreras B A et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 4438 (1998)
74. Carreras B A et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 3653 (1999)
75. Elhmaidid D, Provenzale A, Babiano A *J. Fluid Mech.* **242** 655 (1993)
76. Provenzale A *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31** 55 (1999)
77. Nielsen A H, Pécseli H L, Rasmussen J J *Phys. Plasmas* **3** 1530 (1996)
78. Naulin V, Nielsen A H, Rasmussen J J *Phys. Plasmas* **6** 4575 (1999)
79. Milovanov A V, Zelenyi L M *Phys. Fluids B* **5** 2609 (1993)
80. Большов Л А, Дыхне А М, Кондратенко П С *Письма в ЖЭТФ* **75** 291 (2002)
81. Klafter J, Blumen A, Shlesinger M F *Phys. Rev. A* **35** 3081 (1987)
82. Zimbaro G, Greco A, Veltri P *Phys. Plasmas* **7** 1071 (2000)
83. Zimbaro G, Veltri P, Pommois P *Phys. Rev. E* **61** 1940 (2000)
84. Milovanov A V *Phys. Rev. E* **63** 047301 (2001)
85. Klafter J, Shlesinger M F, Zumofen G *Phys. Today* **49** (2) 33 (1996)
86. Shlesinger M F, Zaslavsky G M, Klafter J *Nature* **363** 31 (1993)
87. Montroll E W, Shlesinger M F, in *Nonequilibrium Phenomena II: from Stochastics to Hydrodynamics* (Studies in Statistical Mechanics, Vol. 11, Eds J Lebowitz, E W Montroll) (Amsterdam: North-Holland Phys. Publ., 1984) p. 1
88. Hughes B D, Montroll E W, Shlesinger M F *J. Stat. Phys.* **28** 111 (1982)
89. Scher H, Shlesinger M F, Bendler J T *Phys. Today* **44** (1) 26 (1991)
90. Mandelbrot B B, van Ness J W *SIAM Rev.* **10** 422 (1968)
91. Zaslavsky G M *Physica D* **76** 110 (1994)
92. Metzler R, Klafter J *Phys. Rep.* **339** 1 (2000)
93. Zaslavsky G M *Phys. Rep.* **371** 461 (2002)
94. Sokolov I M, Klafter J, Blumen A *Phys. Today* **55** (11) 48 (2002)
95. Чукбар К В *ЖЭТФ* **108** 1875 (1995)
96. Hilfer R *Phys. Rev. E* **48** 2466 (1993)
97. Zaslavsky G M *Physica A* **288** 431 (2000)
98. Weitzner H, Zaslavsky G M *Chaos* **11** 384 (2001)
99. Milovanov A V, Zelenyi L M *Phys. Rev. E* **64** 052101 (2001)
100. Нахушев А М *Дробное исчисление и его применение* (М.: Физматлит, 2003)
101. Biler P, Funaki T, Woyczynski W A *J. Differ. Equat. Appl.* **148** 9 (1998)
102. Hilfer R (Ed.) *Applications of Fractional Calculus in Physics* (Singapore: World Scientific, 2000)
103. Buttner H, Blumen A *Nature* **329** 700 (1987)
104. Milovanov A V, Rasmussen J J, cond-mat/0309577; submitted for publ. to *Phys. Rev. B*
105. Владимиров В С *Уравнения математической физики 5-е изд.* (М.: Наука, 1988)
106. Oldham K B, Spanier J *The Fractional Calculus; Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order* (New York: Academic Press, 1974)
107. Самко С Г, Килбас А А, Маричев О И *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Минск: Наука и техника, 1987)
108. Монин А С *ДАН СССР* **105** 256 (1955)
109. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика Ч. 2* (М.: Наука, 1967)
110. Забурдаев В Ю, Чукбар К В *ЖЭТФ* **121** 299 (2002)
111. Jespersen S, Metzler R, Fogedby H C *Phys. Rev. E* **59** 2736 (1999)
112. Bak P, Tang C, Wiesenfeld K *Phys. Rev. Lett.* **59** 381 (1987)
113. Bak P, Tang C, Wiesenfeld K *Phys. Rev. A* **38** 364 (1988)
114. Vespignani A, Zapperi S *Phys. Rev. E* **57** 6345 (1998)
115. Krommes J A *Phys. Plasmas* **7** 1752 (2000)
116. Jensen H J *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)
117. Могилевский Э И *Фракталы на Солнце* (М.: Физматлит, 2001)
118. Diamond P H, Nahm T S *Phys. Plasmas* **2** 3640 (1995)
119. Newman D E et al. *Phys. Plasmas* **3** 1858 (1996)
120. Garbet X, Waltz R E *Phys. Plasmas* **5** 2836 (1998)
121. Freeman M P, Watkins N W, Riley D J *Phys. Rev. E* **62** 8794 (2000)
122. Consolini G, Lui A T Y *Geophys. Res. Lett.* **26** 1673 (1999)
123. Chang T *Phys. Plasmas* **6** 4137 (1999)
124. Charbonneau P et al. *Solar Phys.* **203** 321 (2001)
125. Berry M V J. *Phys. A: Math. Gen.* **12** 781 (1979)
126. Ohtani S et al. *J. Geophys. Res.* **100** 19135 (1995)
127. Потапов А А *Фракталы в радиофизике и радиолокации* (М.: Логос, 2002)
128. Milovanov A V, Zelenyi L M *Adv. Space Res.* **14** (7) 123 (1994)
129. Milovanov A V, Zelenyi L M, in *Solar System Plasmas in Space and Time* (Geophys. Monograph, Vol. 84, Eds J Burch, J H Waite (Jr)) (Washington, DC: Am. Geophys. Union, 1994) p. 43
130. Milovanov A V, Zelenyi L M *Adv. Space Res.* **30** 2667 (2002)
131. Zelenyi L M et al. *Nonlinear Proces. Geophys.* **7** 127 (2000)
132. Lui A T Y, Yoon P H *J. Geophys. Res.* **100** 19147 (1995)
133. Ohtani S et al. *J. Geophys. Res.* **103** 4671 (1998)
134. Paterson W R, Frank L A *Geophys. Res. Lett.* **21** 2971 (1994)
135. Lui A T Y *J. Geophys. Res.* **98** 13423 (1993)
136. Галеев А А, Зеленый Л М *Письма в ЖЭТФ* **25** 407 (1977)
137. Coppi B, Laval G, Pellat R *Phys. Rev. Lett.* **16** 1207 (1966)
138. Nishida A et al. *Geophys. Res. Lett.* **21** 2951 (1994)
139. Hoshino M et al. *Geophys. Res. Lett.* **21** 2935 (1994)
140. Bauer T M et al. *J. Geophys. Res.* **100** 9605 (1995)
141. Russell C T *Planet. Space Sci.* **20** 1541 (1972)
142. Borovsky J E et al. *J. Plasma Phys.* **57** 1 (1997)
143. Borovsky J E et al. *J. Geophys. Res.* **103** 20297 (1998)
144. Milovanov A V, Zelenyi L M *Nonlinear Proces. Geophys.* **7** 211 (2000)
145. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)
146. Harris E G *Nuovo Cimento* **23** 115 (1962)
147. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Наука, 1964)
148. Lui A T Y, Najmi A-H *Geophys. Res. Lett.* **24** 3157 (1997)
149. Christon S P et al. *J. Geophys. Res.* **94** 13409 (1989)
150. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) 2-е изд. (М.: Наука, 1990)
151. Заславский Г М *Статистическая необратимость в нелинейных системах* (М.: Наука, 1970)
152. Fermi E *Phys. Rev.* **75** 1169 (1949)
153. Glockle W G, Nonnenmacher T F *J. Stat. Phys.* **71** 755 (1993)
154. Hasegawa A, Mima K, Duong-van M *Phys. Rev. Lett.* **54** 2608 (1985)
155. Ma C-Y, Summers D *Geophys. Res. Lett.* **25** 4099 (1998)
156. Зеленый Л М, Милованов А В *Астрон. журн.* **69** 147 (1992)
157. Summers D, Thorne R M *J. Geophys. Res.* **97** 16827 (1992)
158. Collier M R *Geophys. Res. Lett.* **20** 1531 (1993)
159. Maksimovic M, Pierrard V, Lemaire J F *Astron. Astrophys.* **324** 725 (1997)
160. Ptuskin V S *Space Sci. Rev.* **111** 1 (2000)
161. Зеленый Л М, Милованов А В *Письма в Астрон. журн.* **17** 1013 (1991)
162. Жульен Р УФН **157** 339 (1989)
163. Смирнов Б М *Физика фрактальных кластеров* (М.: Наука, 1991)
164. Зеленый Л М, Милованов А В *Письма в Астрон. журн.* **18** 622 (1992)
165. Зеленый Л М, Милованов А В *Геомагнетизм и астрономия* **33** 18 (1993)
166. Tajima T et al. *Astrophys. J.* **390** 309 (1992)
167. Tajima T, Cable S, Kulsrud R M *Phys. Fluids B* **4** 2338 (1992)
168. Cable S, Tajima T *Phys. Rev. A* **46** 3413 (1992)
169. Милованов А В *Астрон. журн.* **71** 360 (1994)
170. Прист Э Р *Солнечная магнитогидродинамика* (М.: Мир, 1985)
171. Брей Р, Лоухед Р *Солнечные пятна* (М.: Мир, 1985)
172. Milovanov A V, Zelenyi L M *Geophys. Res. Lett.* **19** 1419 (1992)
173. Parker E N *Astrophys. J.* **128** 664 (1958)
174. Burlaga L F, Mish W H, Roberts D A *J. Geophys. Res.* **94** 177 (1989)
175. Roberts D A, Goldstein M L *J. Geophys. Res.* **92** 10105 (1987)
176. Burlaga L F *Geophys. Res. Lett.* **18** 69 (1991)
177. Burlaga L F *Geophys. Res. Lett.* **18** 1651 (1991)
178. Tu C-Y, Marsch E, Thieme K M *J. Geophys. Res.* **94** 11739 (1989)
179. Tarbell T et al. *Bull. Am. Astron. Soc.* **22** 878 (1990)

180. Eiselevich M V, Eiselevich V G *Astron. Astrophys.* (2004) (to be published)
181. Мельников Ю П *Геомагнетизм и аэронавигация* (2004) (в печати)
182. Anderson P W *Phys. Rev.* **109** 1492 (1958)
183. Orbach R *Physica D* **38** 266 (1989)
184. Courtens E, Vacher R, Stoll E *Physica D* **38** 41 (1989)
185. Aharony A et al. *Phys. Rev. Lett.* **58** 132 (1987)
186. Зосимов В В, Лямшев Л М *УФН* **165** 361 (1995)
187. Prester M *Phys. Rev. B* **60** 3100 (1999)
188. Entin-Wohlman O, Alexander S, Orbach R *Phys. Rev. B* **32** 8007 (1985)
189. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1988)
190. Akhmanov S A, Khokhlov R V, Sukhorukov A P, in *Laser Handbook* Vol. 1 (Eds F T Arecchi, E O Schulz-Dubois) (Amsterdam: North-Holland, 1972)
191. Абловиц М, Сигур Х *Солитоны и метод обратной задачи* (М.: Мир, 1987)
192. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика Ч. 2. Теория конденсированного состояния* (М.: Наука, 1978)
193. Kivelson S A, Fradkin E, Emery V J *Nature* **393** 550 (1998)
194. Ando Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 137005 (2002)
195. Cho A *Phys. Rev. Focus* **9** story 12 (2002)

Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics

L. M. Zelenyi, A. V. Milovanov

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences
 ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
 Tel. (7-095) 333-45 34
 E-mail: lzelenyi@iki.rssi.ru; amilovan@mx.iki.rssi.ru

The goal of this review is to outline some unconventional ideas behind new paradigms in the modern theory of turbulence. Application of nonstandard, topological methods to describe the structural properties of the turbulent state is considered, and transition to kinetic equations in fractional derivatives for describing the microscopic behavior of a medium is examined. Central to the discussion is the concept of a percolation constant $C \approx 1.327 \dots$, an universal parameter describing the topology of nonequilibrium (quasi)stationary states in complex nonlinear dynamical systems allowing self-organized critical behavior. Much attention is given to the formation of power-law energy density spectra in turbulent media. A number of topical problems of modern cosmic electrodynamics, including the self-consistent fractal model of a turbulent current sheet; substorm dynamics; the formation and dynamical evolution of large-scale magnetic fields in the solar photosphere and interplanetary space, are also discussed.

PACS numbers: **05.40. – a**, **05.45.Df**, **05.65. + b**, **94.30. – d**

Bibliography — 195 references

Received 4 July 2003, revised 30 March 2004